Aborder des problèmes avec la calculatrice Fx-CP400

Par Jean-Philippe Blaise

CASIO®

www.casio-education.fr

Introduction

Quelques mots pour vous présenter ce manuel dédié à la Fx-CP400, nouvelle calculatrice graphique formelle de la gamme CASIO.

Dans un premier temps, précisons que ce manuel n'est pas un mode d'emploi de cette calculatrice. Son but est de susciter l'envie d'explorer quelques pistes mathématiques et la calculatrice permettra l'illustration de certaines via ses nombreuses possibilités.

J'ai pris la liberté dans ce manuel de ne pas détailler ni les manipulations de la calculatrice ni les nombreuses démonstrations qu'offrent mes questionnements. À charge au lecteur d'y investir quelques instants pour s'imprégner de l'idée sous-entendue dans chacun des questionnements proposés.

Les avancées techniques de la Fx-CP400 ainsi que son écran tactile permettent d'ouvrir un champ des possibles que nous n'avons plus l'habitude d'exploiter dans des problèmes mathématiques pourtant souvent classiques.

Ainsi, dès le premier chapitre, l'escargot de Cyrène nous offre la possibilité de le travailler dans différents axes TICE autant dans le calcul direct, dans le calcul formel qu'en passant par le tableur ou la géométrie dynamique. La calculatrice sera un support unique pour s'ouvrir à ses différentes exigences techniques.

Il sera agréable de retrouver un point de vue algorithmique en l'extraction d'une racine carrée que nous faisions autrefois à la main. Le lien anachronique entre la technique sophistiquée de demain et le calcul posé d'hier sera une belle expérience que le chapitre 2 saura nous offrir.

Le manuel s'achèvera avec une propriété souvent oubliée qui permettra d'être illustrée par de la géométrie dynamique utile pour conforter une conjecture qu'il ne restera qu'à démontrer.

En vous souhaitant une bonne lecture et, quelques pages de brouillons…

Mathématicalement,

Jean-Philippe Blaise

Sommaire

Escargot de Cyrène page 5

Racine carrée d'un nombre entier page 29

Somme de deux dés page 41

Équations du second degré page 51

Le plant de Maïs page 67

Carré de Thébault page 77

Escargot de Cyrène

L'escargot de Cyrène ou escargot de Pythagore est un classique permettant de justifier de l'utilité d'avoir une valeur exacte dans un calcul impliquant une solution ayant un radical.
Il est aussi utile pour montrer que la répétition d'une construction apporte son lot d'approximation autant dans la partie calculatoire que dans la partie construction pure.

Une analyse classique

Par contre, nous pouvons le dévier de sa fonction primaire en s'imposant un nouvel axe de réflexion :

> Pour quel triangle, l'escargot fait-il un tour sur lui-même ?
> De quelle mesure d'angle dépasse-t-il les 360° ?
>
> **Questionnement 1**

De ces deux questionnements, nous pouvons aborder le problème sous différents axes utilisant les supports offerts par la fx-CP400. A savoir :

- La géométrie dynamique pour une construction rapide et révolutionnaire par rapport à d'autres géométries dynamiques disponibles.
- Le tableur pour un calcul direct et une analyse de la situation
- L'algorithmique car, si on visualise une construction répétitive, il serait dommage de ne pas lui associer des boucles dans un programme.

Créons la rupture

Un autre axe de réflexion permettra de donner une dimension plus expérimentale à la situation.

> N'existe-t-il pas un triangle de départ qui permette dans un nombre raisonnable de triangles d'aboutir à faire un tour complet de précisément 360° ?
>
> **Questionnement 2**

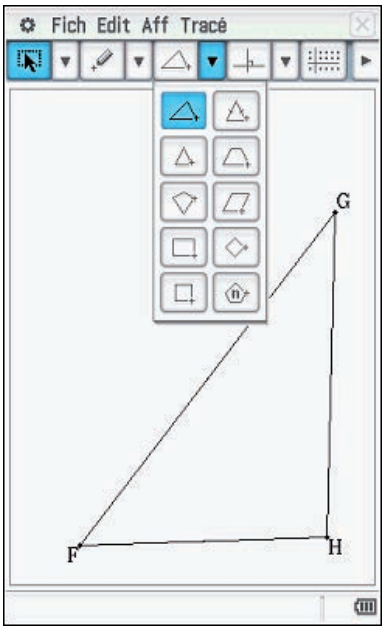
Un travail sur l'algorithmique permettra de trouver un rapport dans le triangle de départ où l'escargot va faire un tour de 360° et, une analyse au tableur permettra de valider la solution approximative proposée.

Escargot de Cyrène

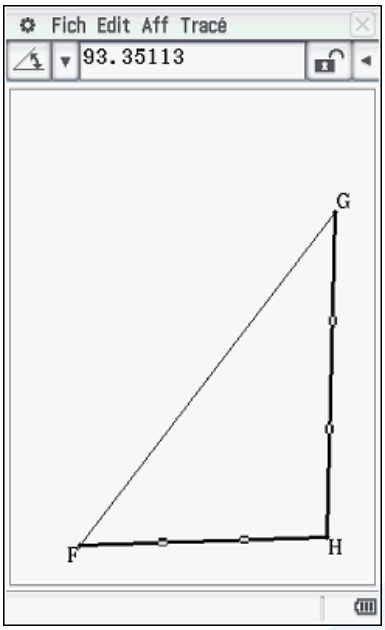
Questionnement 1, version géométrie dynamique

Dans un premier temps, il est intéressant de construire la figure afin d'avoir une analyse fine de la situation. Puis, nous pourrons faire les premières constatations et aboutir à quelques conclusions exploitables en classe.

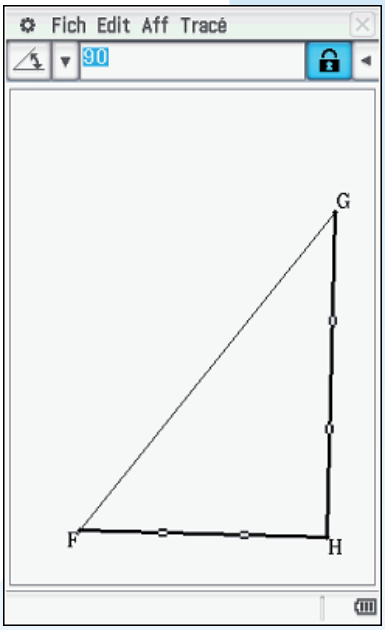
Construction



Capture 1.1



Capture 1.2

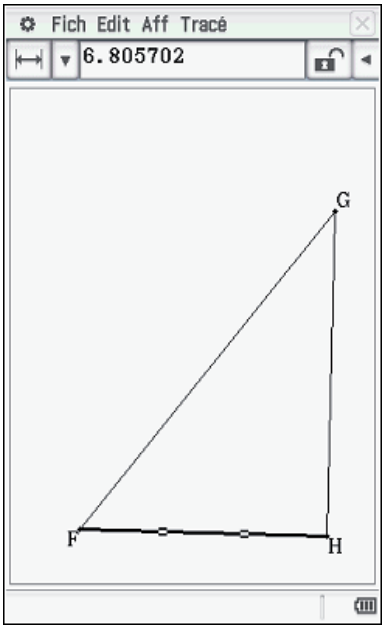


Capture 1.3

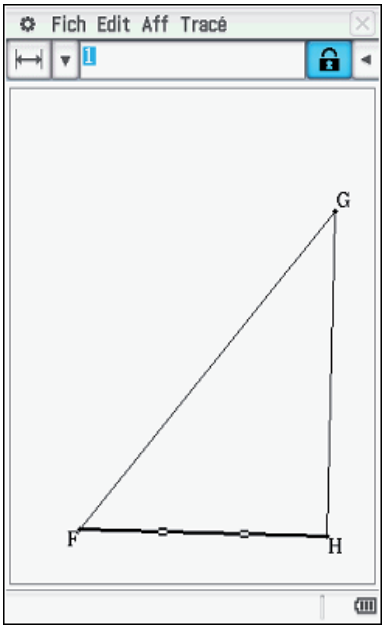
Capture 1.1 : la géométrie dynamique visible dans les calculatrices Casio permet des constructions rapides que nous pouvons nommer : *construction avec contraintes.*

Capture 1.2 : ainsi, pour construire un triangle rectangle dont on connaît les longueurs, il suffit de poser sur l'écran un triangle. Puis, d'y sélectionner deux côtés.

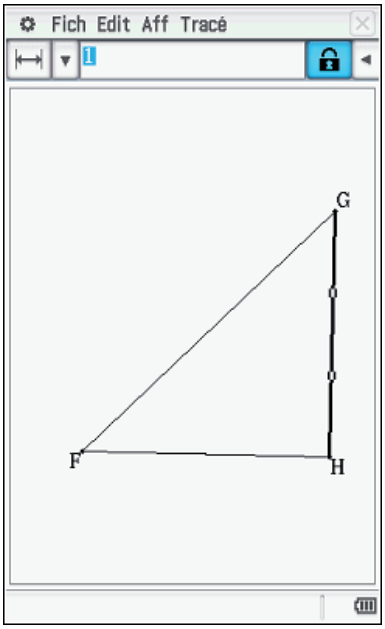
Capture 1.3 : Il apparaît la mesure de l'angle que l'on peut modifier pour qu'il soit tel un angle droit . Un cadenas affiche la contrainte et la figure reste dynamique.



Capture 1.4



Capture 1.5

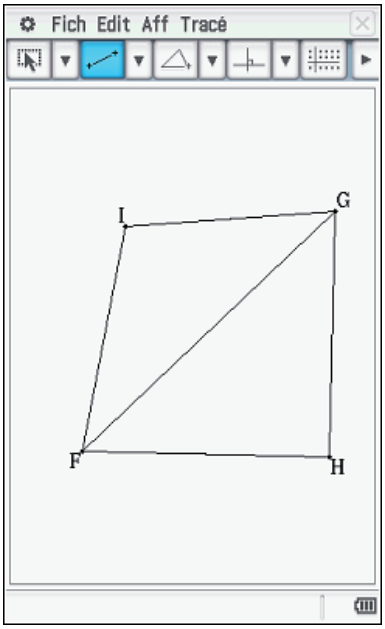


Capture 1.6

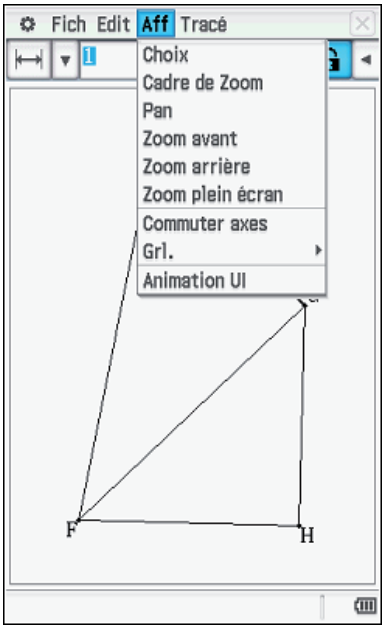
Capture 1.4 : nous faisons de même pour les longueurs des cathètes. Sélectionnons un côté. La mesure est inscrite.

Capture 1.5 : il suffit de la changer pour passer à l'unité.

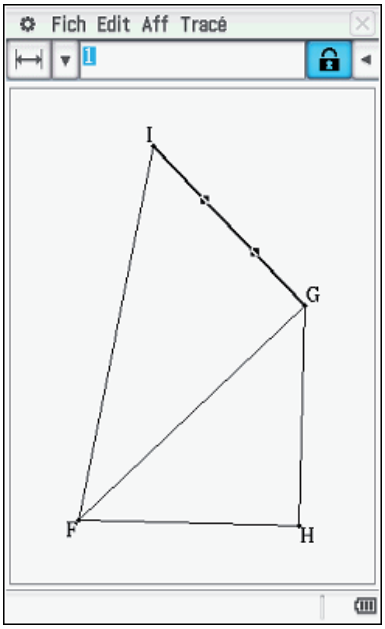
Capture 1.6 : de même pour faire apparaître notre premier triangle rectangle isocèle. Le triangle se construit rapidement et, nous n'avons pas eu besoin de gérer des intersections de cercles unitaires et de perpendiculaires.



Capture 1.7



Capture 1.8

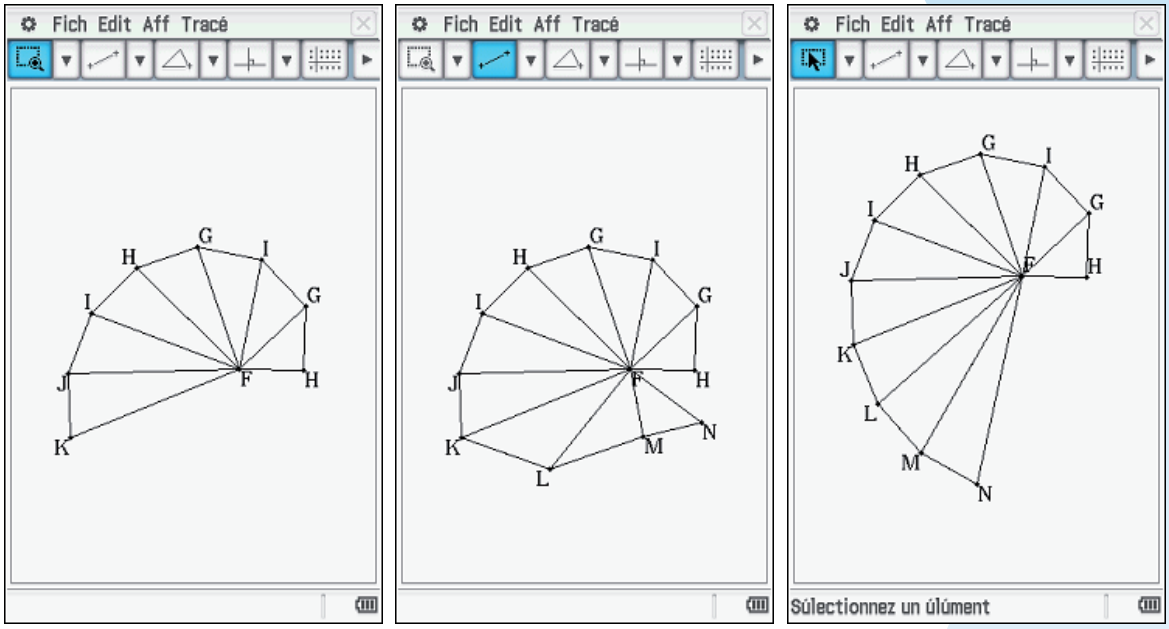


Capture 1.9

Capture 1.7 : à nouveau la construction du second triangle devient presque trop facile. Il suffit de dessiner deux segments.

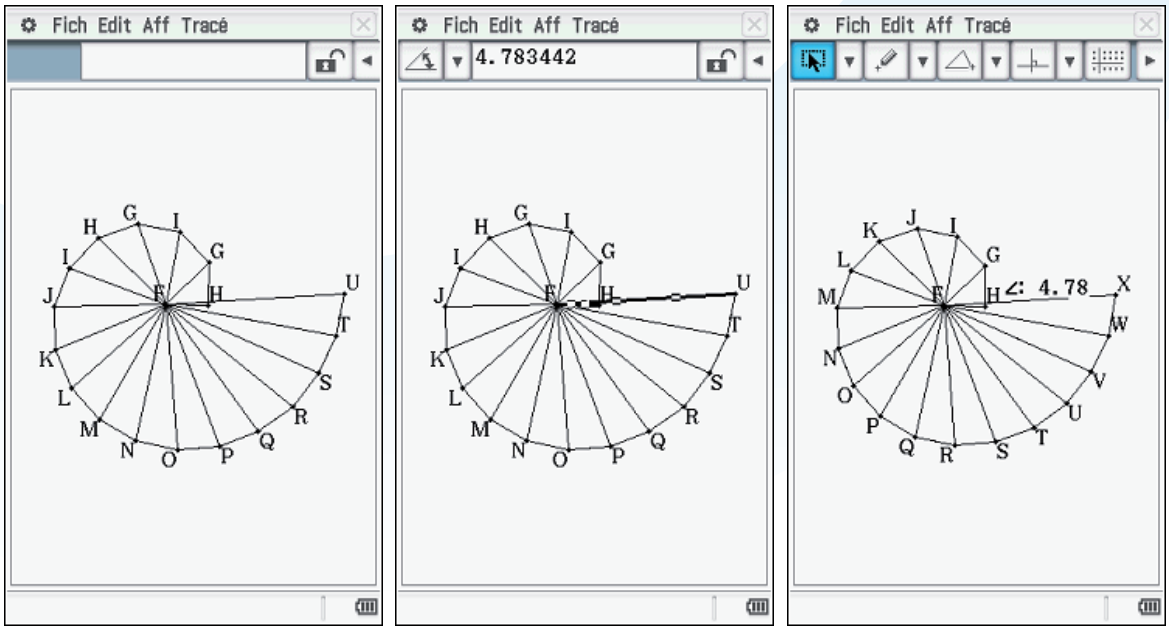
Capture 1.8 : puis, de définir l'angle droit ainsi que la longueur extérieure unitaire.

Capture 1.9 : notons que l'affichage peut être ramené sur l'écran en utilisant *Zoom plein écran*.



Capture 1.10

Capture 1.10 : on a la possibilité de dessiner plusieurs triangles et de définir leurs propriétés ultérieurement. Et, ainsi de suite…

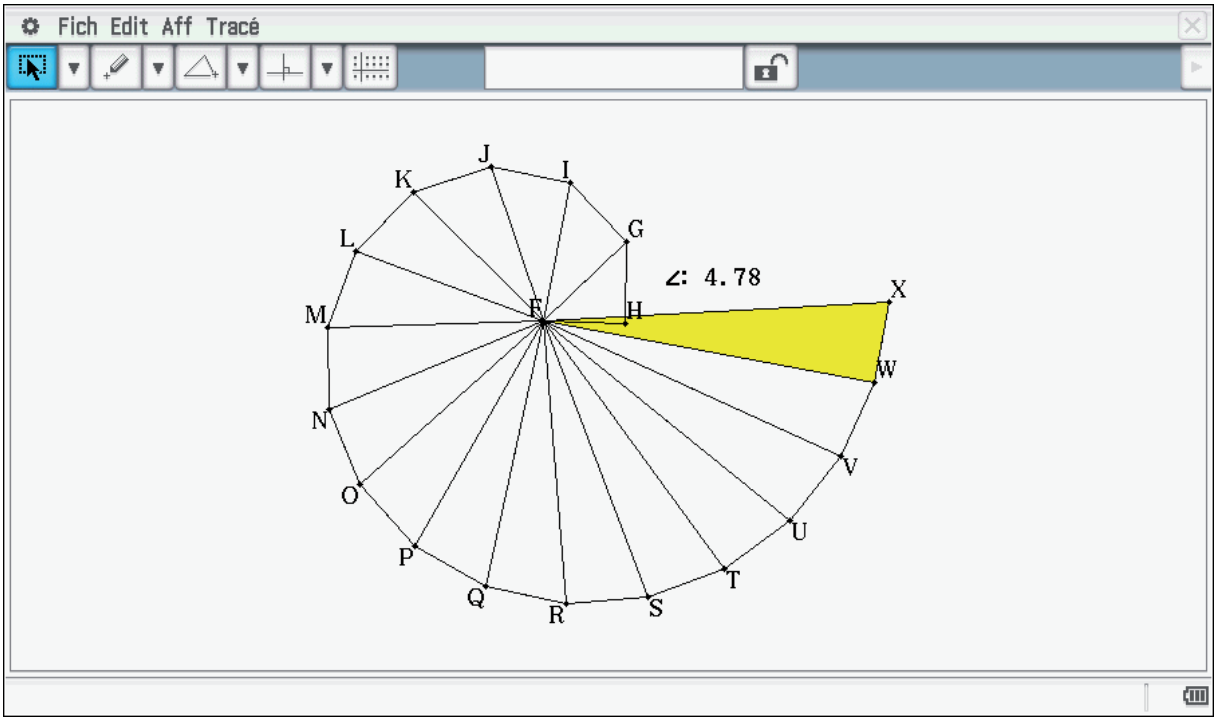


Capture 1.11 Capture 1.12 Capture 1.13

Capture 1.11 : une fois le tour complet, on visualise 17 triangles.

Capture 1.12 : on peut sélectionner avec le stylet les segments [FH] et [FX]. Dans la zone des variables à définir, il est possible de lire l'angle entre les deux segments.

Capture 1.13 : par un *glisser/déposer* sur la figure, on peut afficher directement cette mesure.



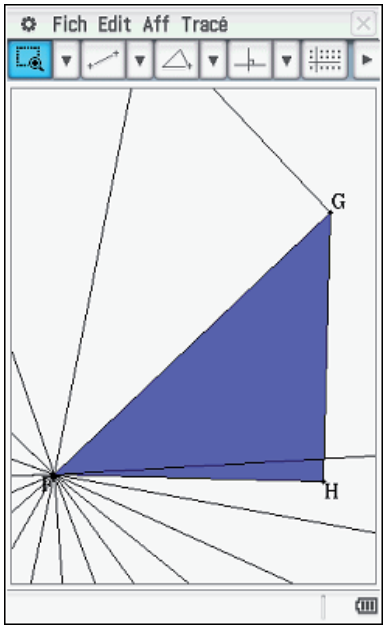
Capture 1.14

Capture 1.14 : **au bout de 17 triangles, nous trouvons que l'escargot de Cyrène fait un tour sur lui-même en dépassant les 360° de 4,78°.**

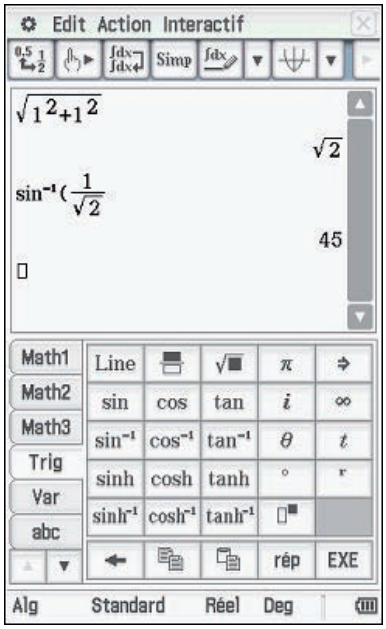
Escargot de Cyrène

Questionnement 1, version tableur

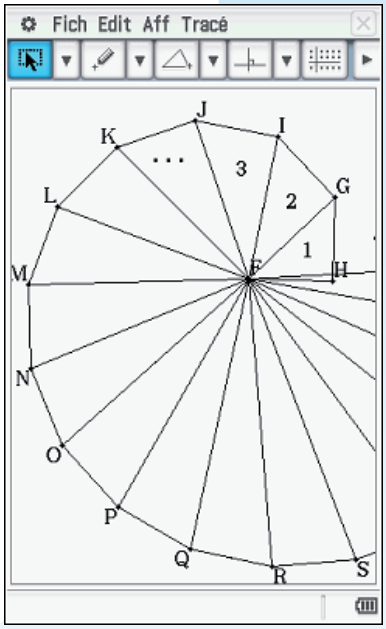
Préparons les calculs au tableur



Capture 2.1



Capture 2.2



Capture 2.3

Capture 2.1 :
Dans le triangle FGH rectangle en H, on a plusieurs propriétés intéressantes.
De par la propriété de Pythagore, nous avons :

$$FG = \sqrt{FH^2 + HG^2}$$

Soit,

$$FG = \sqrt{2}$$

Capture 2.2 :
De par la trigonométrie, nous savons :

$$\sin\left(\widehat{HFG}\right) = \frac{HG}{FG}$$
$$\text{mes}\left(\widehat{HFG}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{HG}{FG}\right)$$

Soit,

$$\text{mes}\left(\widehat{HFG}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\mathbf{mes}\left(\widehat{\boldsymbol{HFG}}\right) = \mathbf{45°}$$

Capture 2.3 :
Nommons chaque triangle pour engager ce travail de répétition. Ainsi, le triangle T_i représentera le i-ième triangle de la construction. Dans ce cas, pour ce triangle, nous aurons :

L'hypoténuse du triangle T_i :

$$H_i = \sqrt{1+i}$$

L'angle au centre de l'escargot pour le triangle en question :

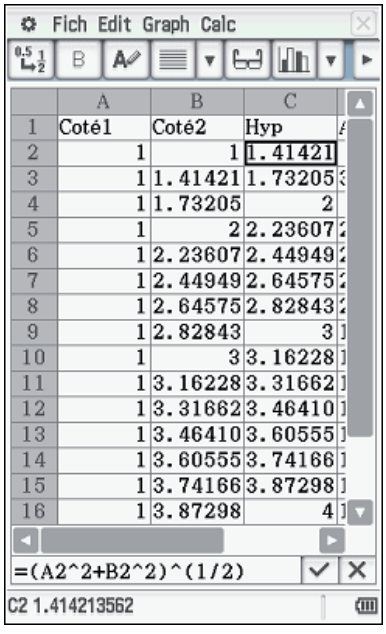
$$A_i = \sin^{-1}\left(\frac{1}{H_i}\right)$$

La mesure totale des angles construits au i[ème] triangle :

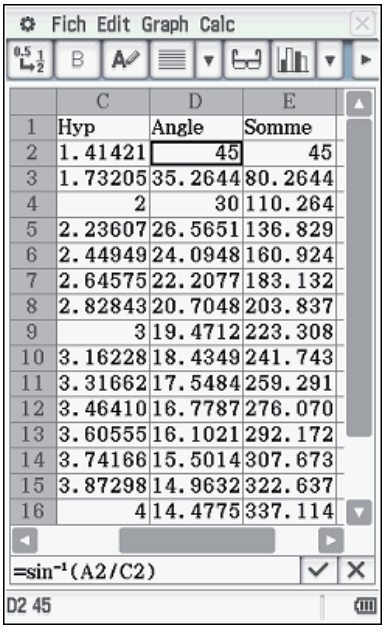
$$M_i = \sum_{n=1}^{i} A_n$$

Le tableur proprement dit

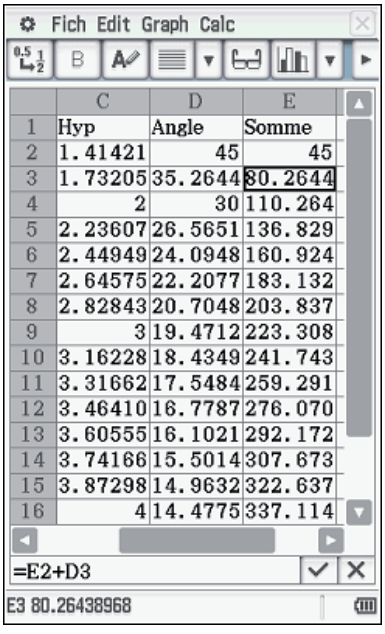
Il permet de retrouver la valeur de l'angle formé par l'escargot en fonction du numéro du triangle. Notons que les colonnes vont utiliser une valeur approchée bien proche de la réalité. Du coup, nous allons voir apparaître pour les radicaux de carrés parfaits, les valeurs adéquates.
Un travail ultérieur sera envisageable pour montrer l'utilité dans un calcul répétitif de travailler avec les valeurs exactes.



Capture 2.4



Capture 2.5



Capture 2.6

Capture 2.4 : les trois premières colonnes représentent dans l'ordre :
le côté opposé du triangle, le coté adjacent et l'hypoténuse du triangle de la i-ème ligne.

Voici quelques formules inscrites dans ce tableau :

$$C2 = \sqrt{B2\text{^}2 + A2\text{^}2}$$

$$D2 = \sin^{-1}\left(\frac{A2}{C2}\right)$$

$$E3 = E2 + D3$$

Fich Edit Graph Calc

	A	B	C	D	E	F
1	Coté1	Coté2	Hyp	Angle	Somme	
2	1	1	1.41421	45	45	
3	1	1.41421	1.73205	35.2644	80.2644	
4	1	1.73205	2	30	110.264	
5	1	2	2.23607	26.5651	136.829	
6	1	2.23607	2.44949	24.0948	160.924	
7	1	2.44949	2.64575	22.2077	183.132	
8	1	2.64575	2.82843	20.7048	203.837	
9	1	2.82843	3	19.4712	223.308	
10	1	3	3.16228	18.4349	241.743	
11	1	3.16228	3.31662	17.5484	259.291	
12	1	3.31662	3.46410	16.7787	276.070	
13	1	3.46410	3.60555	16.1021	292.172	
14	1	3.60555	3.74166	15.5014	307.673	
15	1	3.74166	3.87298	14.9632	322.637	
16	1	3.87298	4	14.4775	337.114	
17	1	4	4.12311	14.0362	351.150	
18	1	4.12311	4.24264	13.6330	**364.78**	
19						
20						
21						

=E17+D18

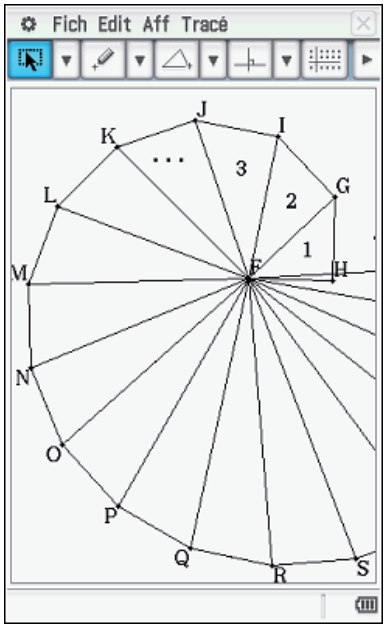
E18 364.7834423

Capture 2.7

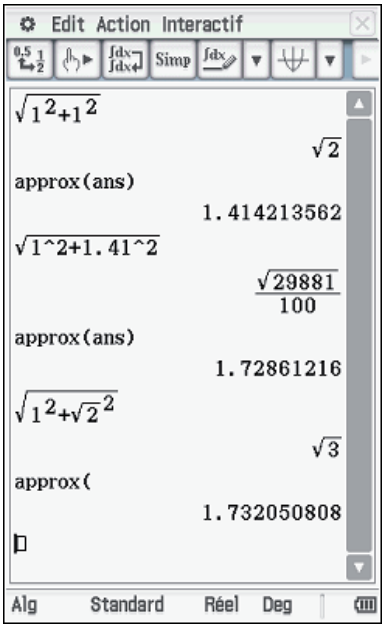
Evidemment, on retrouve que pour le triangle de la 17e étape (soit la 18e ligne) que le tour complet se fait en 364,78°.

Le tableur et la marge d'erreur

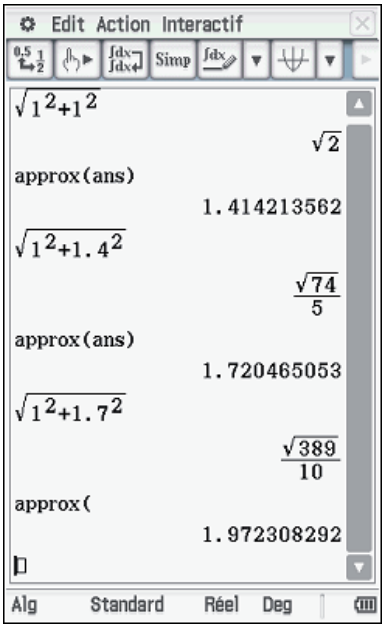
Un travail répétitif permet de se rendre compte de l'utilité de garder le radical pour une précision absolue dans le calcul.



Capture 2.8



Capture 2.9



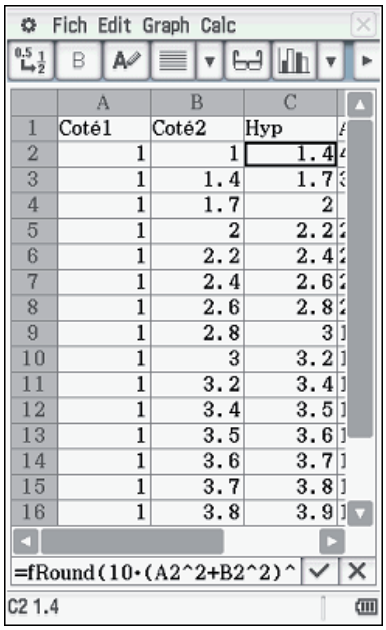
Capture 2.10

Capture 2.8 : sur le calcul des hypoténuses des deux premiers triangles. Une erreur non négligeable apparaît si l'on décide de ne tenir compte que des arrondis au dixième voire au centième.

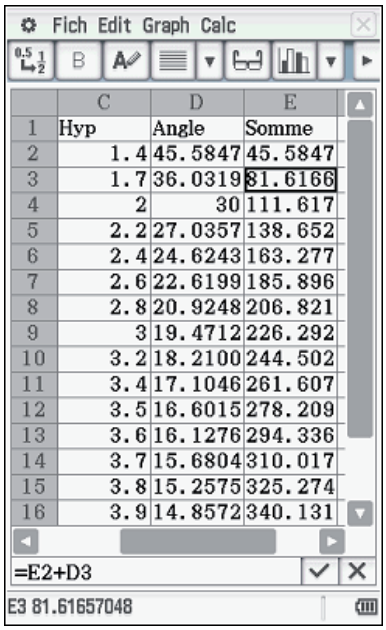
Capture 2.9: un travail *élève* sera à envisager pour faire prendre conscience de l'utilité du passage à la racine carrée dans les calculs plutôt que de l'utilisation d'une valeur approchée.

Qu'en est-il de l'imprécision d'une telle valeur approchée au bout de 17 calculs les impliquant les uns aux autres ?

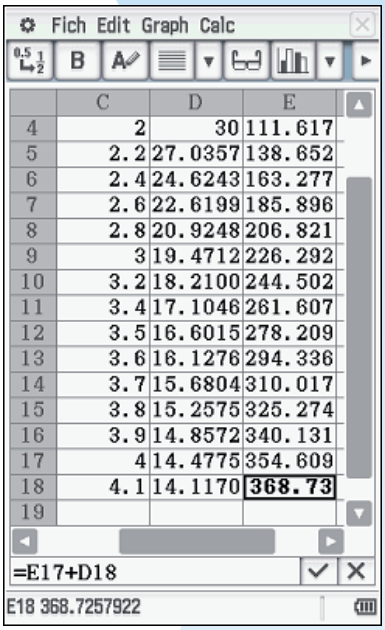
Transformons le tableur précédent pour ne garder qu'une valeur arrondie au centième.



Capture 2.11



Capture 2.12



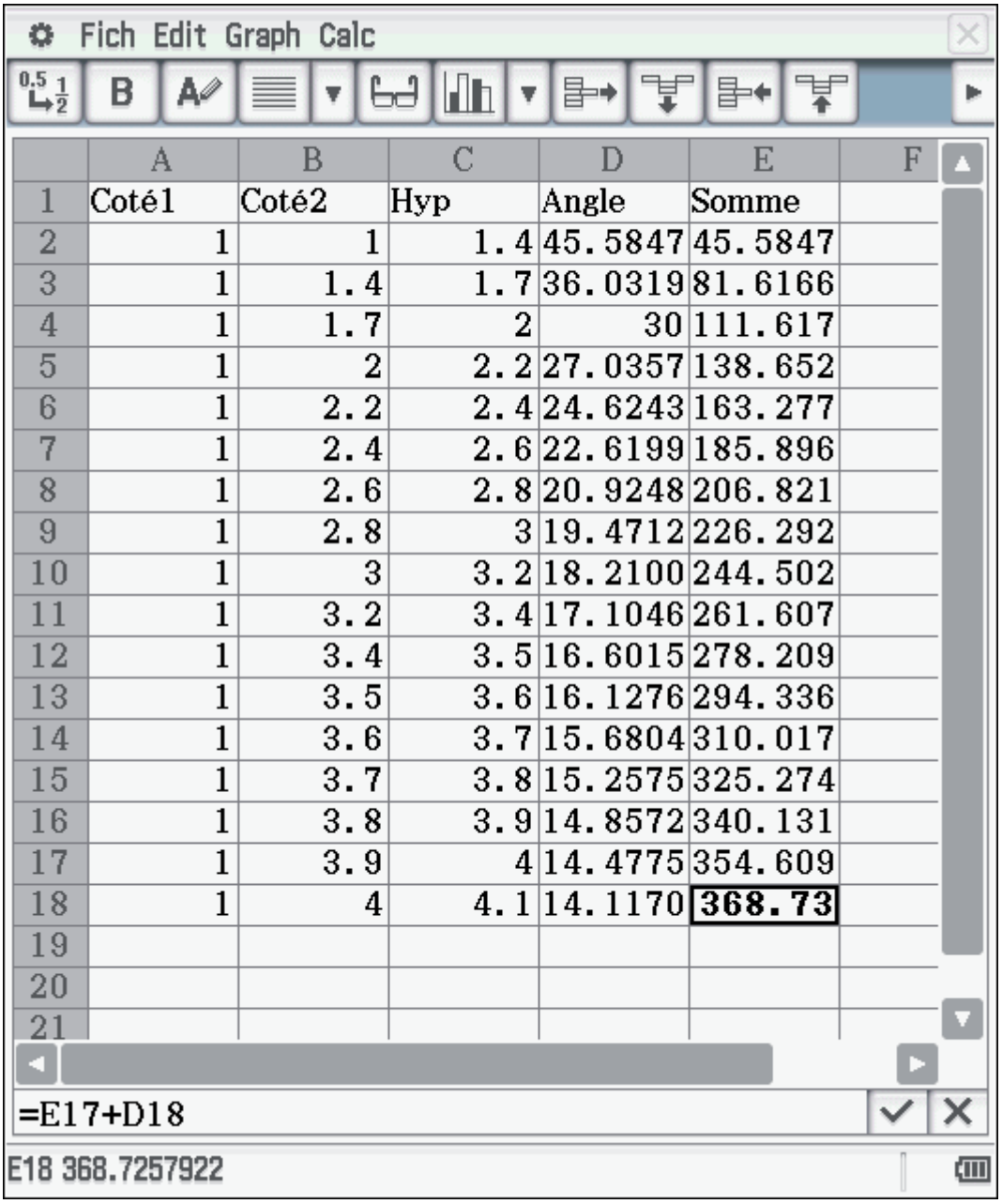
Capture 2.13

Capture 2.11 : la formule utilisée pour transformer le tableau précédent est simplement :

$$C2 = \frac{fRound\left(10.\left(\sqrt{B2^2 + A2^2}\right),0\right)}{10}$$

Où *fRound(nb,d)* retourne l'arrondi du nombre *nb* avec *d* chiffres après la virgule.

Capture 2.13 : **l'arrondi au dixième apporte une marge d'erreur non négligeable. Le tour complet ne se fait plus en 364,78° mais en 368,73° !**



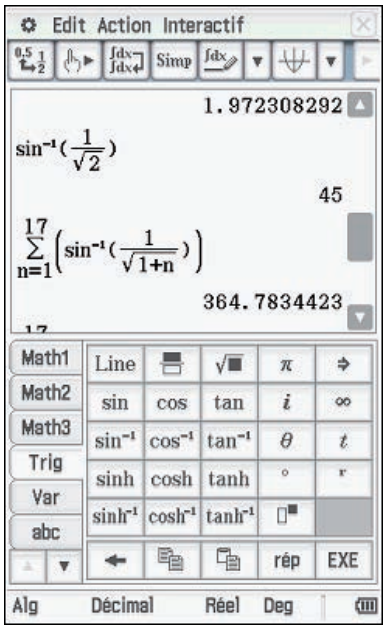
	A	B	C	D	E	F
1	Coté1	Coté2	Hyp	Angle	Somme	
2	1	1	1.4	45.5847	45.5847	
3	1	1.4	1.7	36.0319	81.6166	
4	1	1.7	2	30	111.617	
5	1	2	2.2	27.0357	138.652	
6	1	2.2	2.4	24.6243	163.277	
7	1	2.4	2.6	22.6199	185.896	
8	1	2.6	2.8	20.9248	206.821	
9	1	2.8	3	19.4712	226.292	
10	1	3	3.2	18.2100	244.502	
11	1	3.2	3.4	17.1046	261.607	
12	1	3.4	3.5	16.6015	278.209	
13	1	3.5	3.6	16.1276	294.336	
14	1	3.6	3.7	15.6804	310.017	
15	1	3.7	3.8	15.2575	325.274	
16	1	3.8	3.9	14.8572	340.131	
17	1	3.9	4	14.4775	354.609	
18	1	4	4.1	14.1170	**368.73**	
19						
20						
21						

Capture 2.14

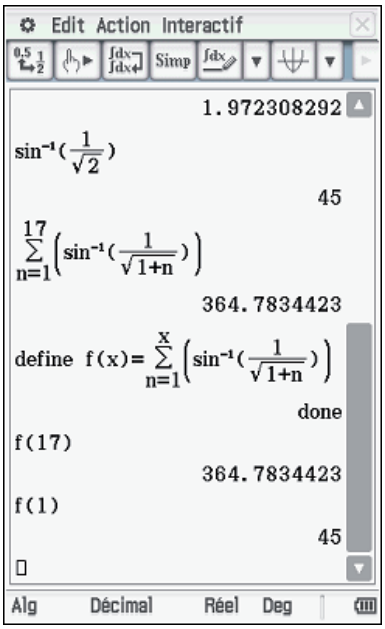
Attention, notez bien que le tableau présent ci-dessus contient une marge d'erreur non négligeable, il s'agit d'illustrer l'idée de valeurs approchées et de valeurs exactes dans un calcul.

Escargot de Cyrène

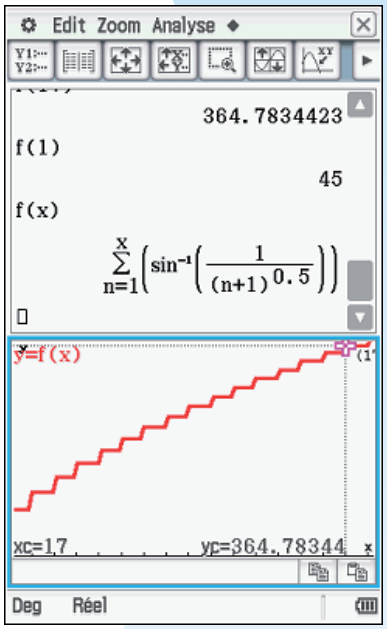
Questionnement 1, mode CAS et suite



Capture 3.1



Capture 3.2



Capture 3.3

Capture 3.1 : un travail rapide permettant de réinvestir la partie tableur vu précédemment permet de retrouver en une ligne de calcul la réponse attendue au questionnement 1.

A savoir :

$$M_{17} = \sum_{n=1}^{17} A_n$$

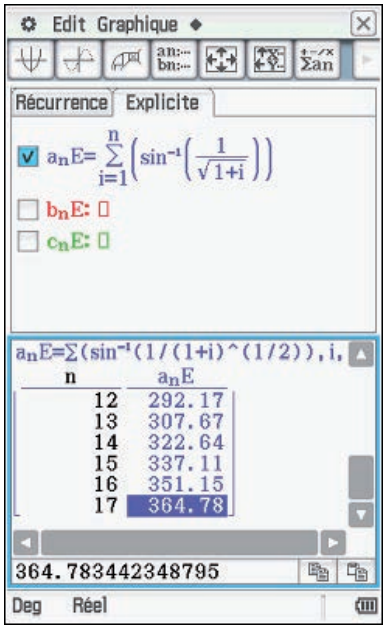
$$M_{17} = \sum_{n=1}^{17} \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+n}}$$

$$\boldsymbol{M_{17} \cong 364,78°}$$

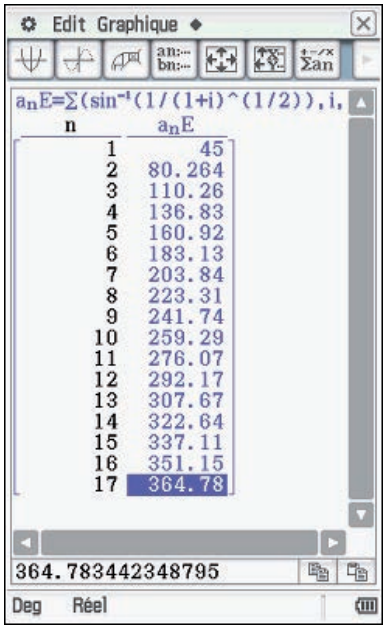
Capture 3.2 : notons que l'on peut définir la fonction :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{x} \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+n}}$$

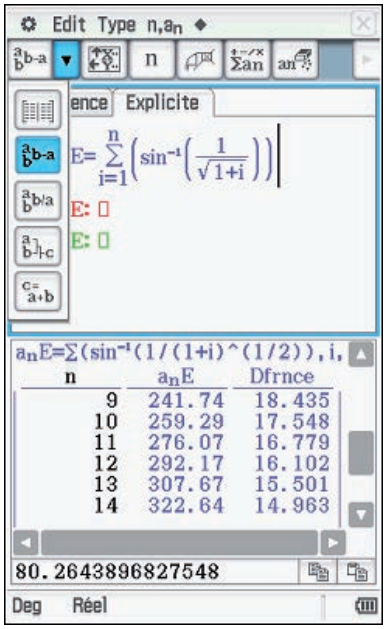
Capture 3.3 : fonction qui n'aura de sens que pour des valeurs entières de x ce que nous confirme sa courbe en escalier visible dans la capture d'écran précédente.



Capture 3.4



Capture 3.5



Capture 3.6

Capture 3.4 : nous pouvons utiliser le *mode suite* pour la définir plus proprement en n'exploitant que les nombres entiers du domaine de définition.

Capture 3.5 : il est d'ailleurs possible de faire apparaître le tableau des valeurs.

Capture 3.6 : et, sur celui-ci d'y faire figurer les différences. Ainsi, nous pouvons retrouver l'angle au centre de chaque triangle construit.

Escargot de Cyrène

Questionnement 2, version CAS et résolution d'équation, le cas du 17e triangle

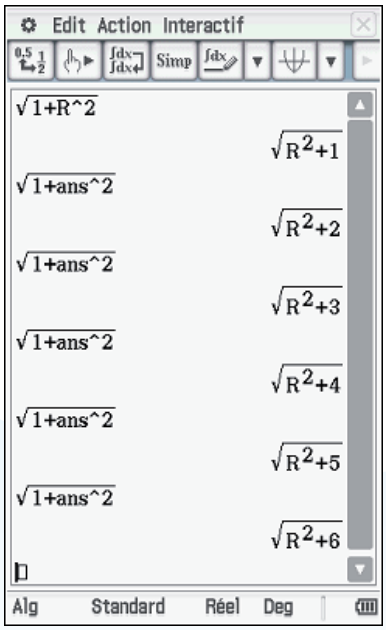
Dans le problème historique, le triangle est rectangle isocèle. Le rapport entre les côtés de l'angle droit est 1.

Le tour complet n'est pas réalisé pour 360° précisément.

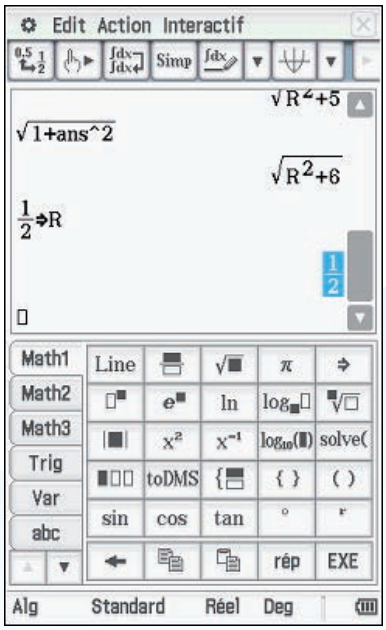
Essayons de trouver un rapport R permettant d'aboutir dans un nombre raisonnable de triangles à une spirale aboutissant exactement à un tour complet.

Attention, nous devons garder des constantes de répétitions, à savoir :

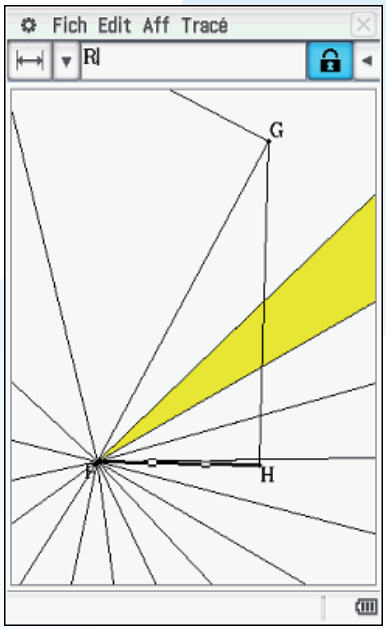
- Chaque triangle rajouté sera un triangle rectangle
- Le côté opposé à l'angle au centre sera unitaire



Capture 4.1



Capture 4.2

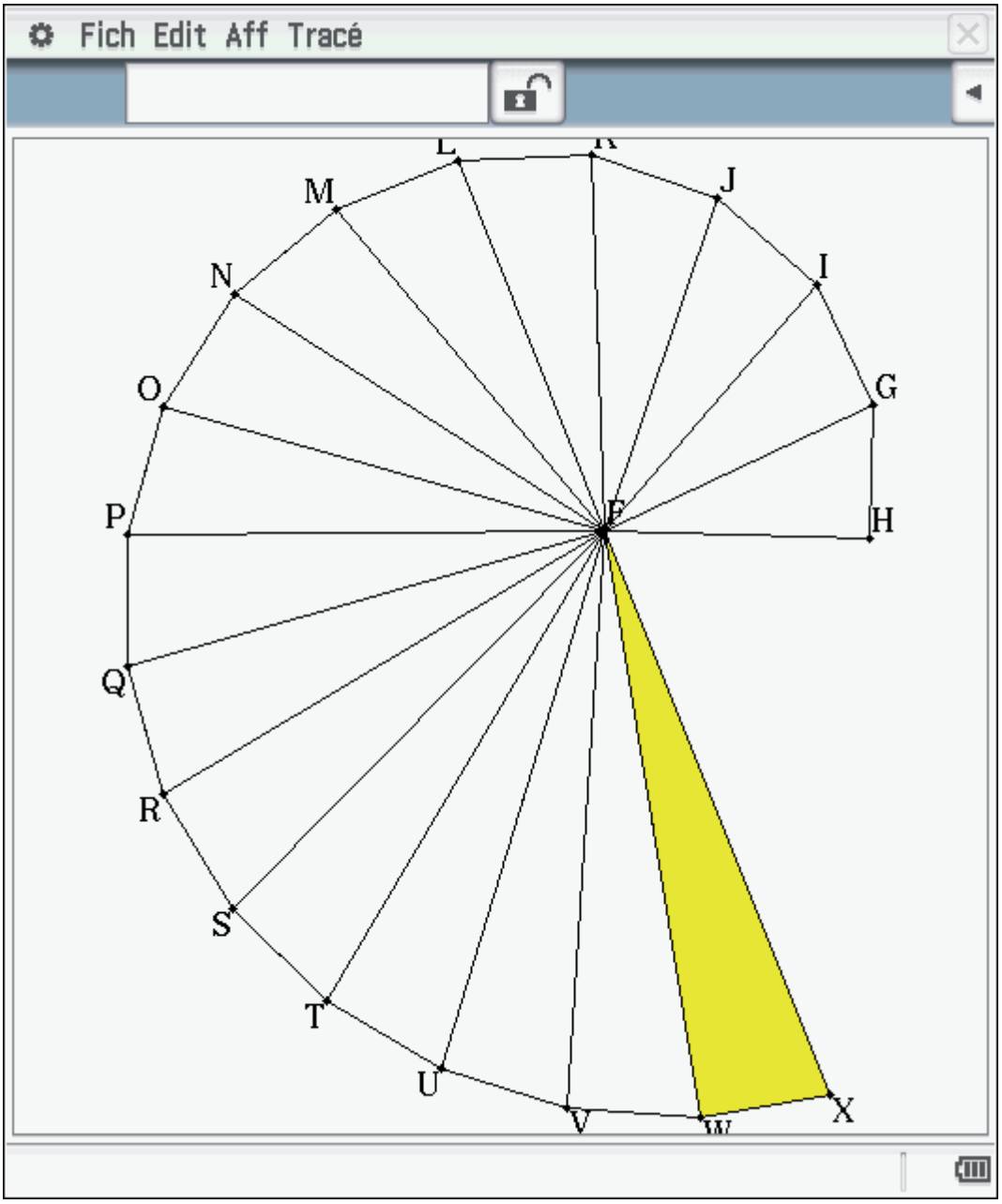


Capture 4.3

Capture 4.1 : dans le *mode CAS*, un travail autour de la propriété de Pythagore permet de retrouver les hypoténuses respectives.

Capture 4.2 : il sera possible d'affecter la longueur R du premier triangle (ici, $= \frac{1}{2}$) et de les faire exploiter dans le mode de géométrie dynamique de la calculatrice.

Capture 4.3 : ainsi, pour un rapport R donné, l'escargot de Cyrène aura une forme plus ou moins « fermée » sur lui-même.



Capture 4.4

Capture 4.4 : ici, toujours pour R=2, on retrouve un escargot de 17 triangles qui ne se referme pas du tout sur lui-même.

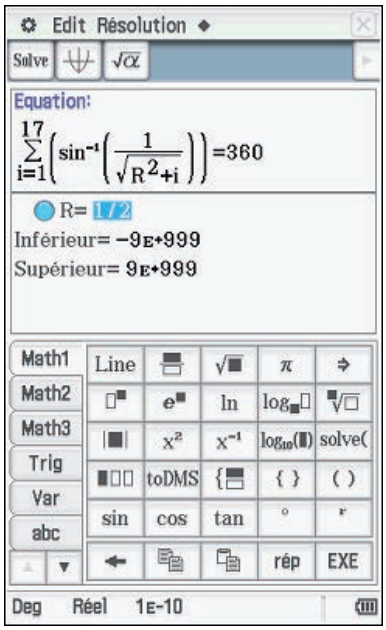
Du coup, il serait intéressant de retrouver le rapport adéquat qui approche au mieux les 360°.

Notons l'angle au bout de la 17e construction :

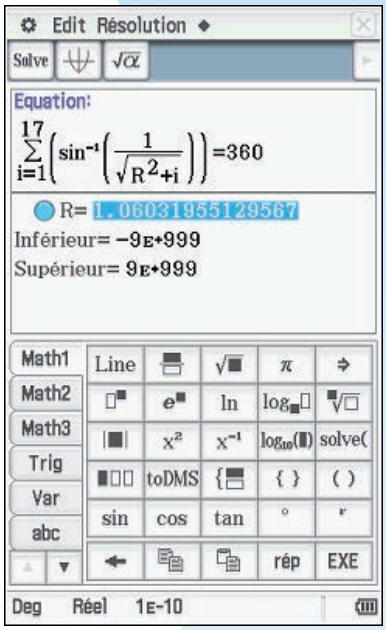
$$M_{17} = \sum_{i=1}^{17} \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{R^2 + i}}$$

Mode de résolution numérique d'équations

Capture 4.5



Capture 4.6



Capture 4.7

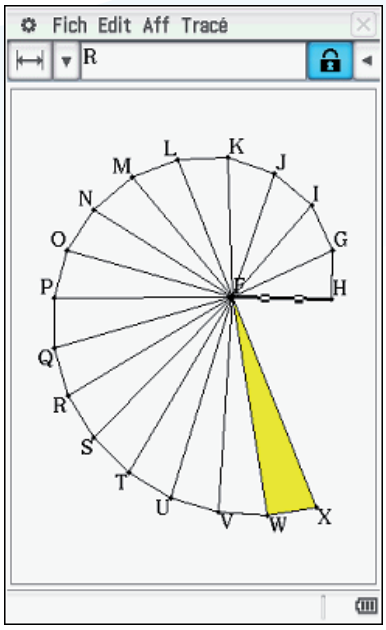
Capture 4.5 : passons dans le mode *Résolution Numérique* de la calculatrice.

Capture 4.6 : nous pouvons l'interroger sur la valeur que doit prendre R pour que la somme des 17 mesures d'angles s'approche au mieux de 360°.

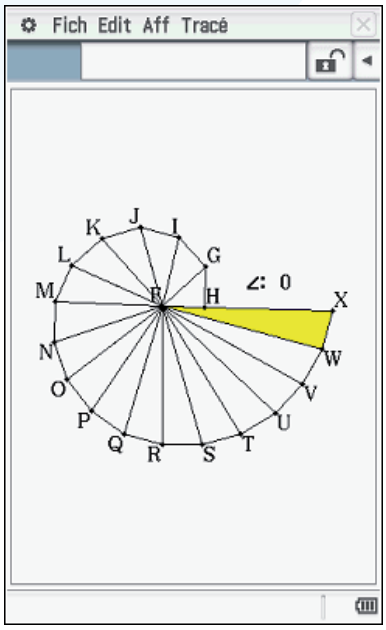
Capture 4.7 : on trouve :

$$R \approx 1.06031955$$

Capture 4.8



Capture 4.9

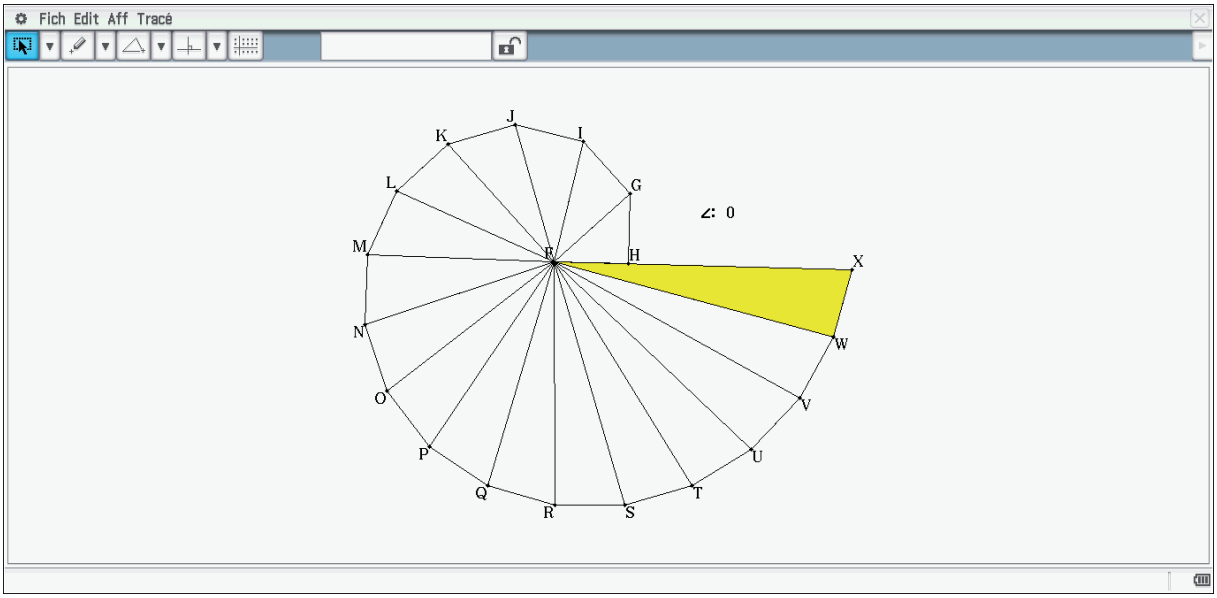


Capture 4.10

Capture 4.8 : la valeur trouvée peut être utilisée dans les différents modes de la calculatrice.

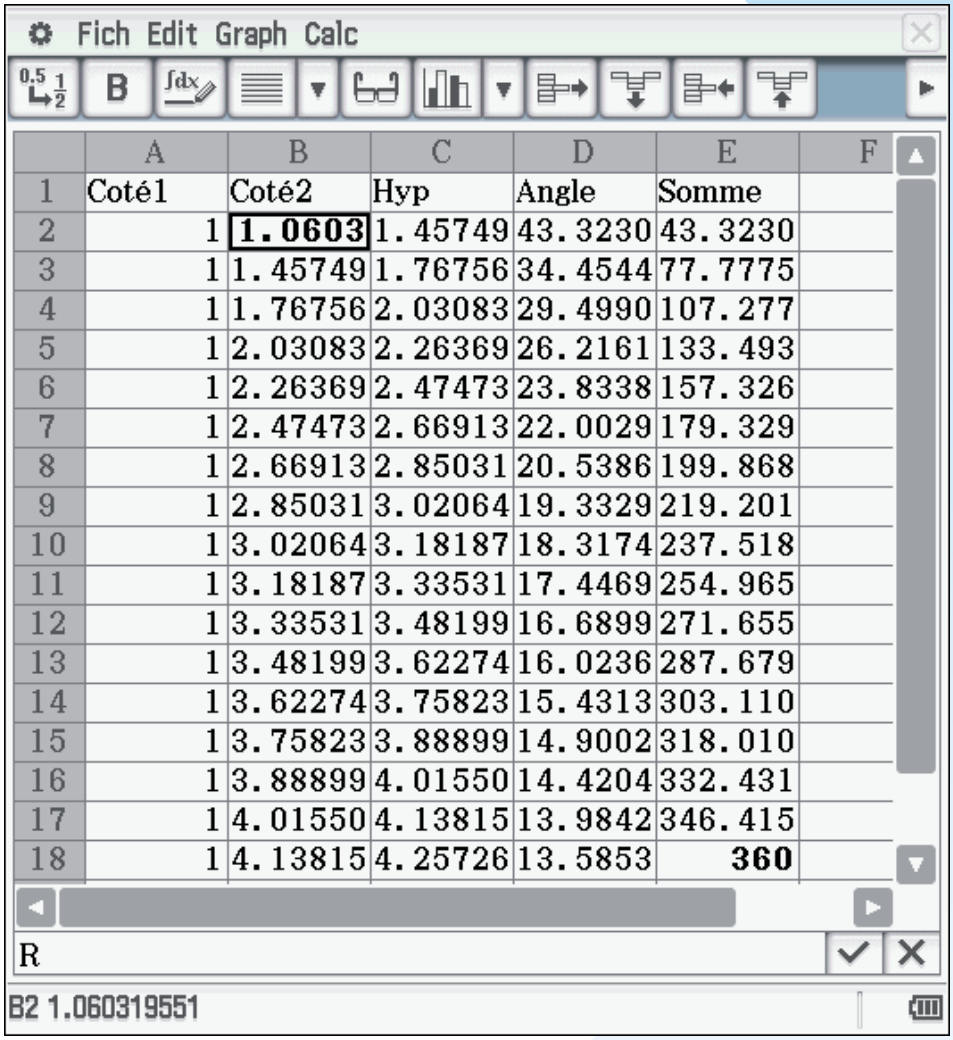
Capture 4.9 : ainsi, rien ne nous empêche de l'injecter directement dans la figure dynamique déjà créée en sélectionnant le segment de départ et en y affectant la valeur R mémorisée.

Capture 4.10 : On retrouve graphiquement un angle nul pour la différence entre l'angle plat et la somme des angles de l'escargot.



Capture 4.11

Une valeur approchée de R permet d'obtenir un escargot de 17 triangles se fermant « exactement » sur lui-même. Le travail précédent au tableau permet de conclure que la différence nulle n'est pas absolue mais, bien relative à la marge d'erreur des calculs engendrés !



	A	B	C	D	E	F
1	Coté1	Coté2	Hyp	Angle	Somme	
2	1	**1.0603**	1.45749	43.3230	43.3230	
3	1	1.45749	1.76756	34.4544	77.7775	
4	1	1.76756	2.03083	29.4990	107.277	
5	1	2.03083	2.26369	26.2161	133.493	
6	1	2.26369	2.47473	23.8338	157.326	
7	1	2.47473	2.66913	22.0029	179.329	
8	1	2.66913	2.85031	20.5386	199.868	
9	1	2.85031	3.02064	19.3329	219.201	
10	1	3.02064	3.18187	18.3174	237.518	
11	1	3.18187	3.33531	17.4469	254.965	
12	1	3.33531	3.48199	16.6899	271.655	
13	1	3.48199	3.62274	16.0236	287.679	
14	1	3.62274	3.75823	15.4313	303.110	
15	1	3.75823	3.88899	14.9002	318.010	
16	1	3.88899	4.01550	14.4204	332.431	
17	1	4.01550	4.13815	13.9842	346.415	
18	1	4.13815	4.25726	13.5853	**360**	

Capture 4.12

Capture 4.12 : idem dans le mode *Tableur*. Où, la valeur R peut être directement posée dans la case B2.

Escargot de Cyrène

Questionnement 2, cas général.

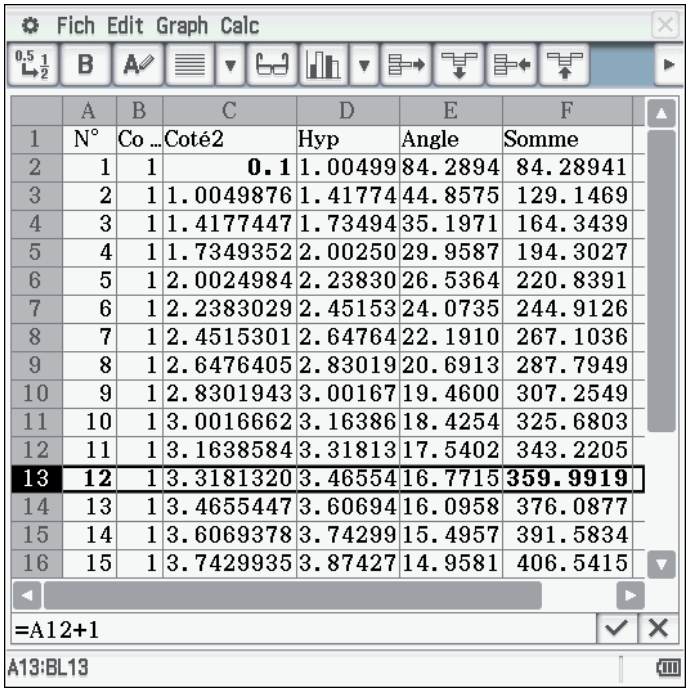
Le but est maintenant de généraliser la situation. Le rapport d'environ 1.06 trouvé précédemment concerne une construction de 17 triangles exactement. Il est possible de se poser la même question pour un autre nombre de triangles.

Un nombre minimum de triangle ?

Pour quel nombre, ce rapport devient-il impossible à dessiner correctement sur une feuille de papier ?

Le tableur va nous offrir la réponse.

Considérons un rapport minimal d'un dixième (le double de la marge d'erreur d'un crayon 0.5 mn). Et, regardons si les 360° sont atteints et pour quelle ligne de construction :



	A	B	C	D	E	F
1	N°	Co …	Coté2	Hyp	Angle	Somme
2	1	1	**0.1**	1.00499	84.2894	84.28941
3	2	1	1.0049876	1.41774	44.8575	129.1469
4	3	1	1.4177447	1.73494	35.1971	164.3439
5	4	1	1.7349352	2.00250	29.9587	194.3027
6	5	1	2.0024984	2.23830	26.5364	220.8391
7	6	1	2.2383029	2.45153	24.0735	244.9126
8	7	1	2.4515301	2.64764	22.1910	267.1036
9	8	1	2.6476405	2.83019	20.6913	287.7949
10	9	1	2.8301943	3.00167	19.4600	307.2549
11	10	1	3.0016662	3.16386	18.4254	325.6803
12	11	1	3.1638584	3.31813	17.5402	343.2205
13	**12**	1	3.3181320	3.46554	16.7715	**359.9919**
14	13	1	3.4655447	3.60694	16.0958	376.0877
15	14	1	3.6069378	3.74299	15.4957	391.5834
16	15	1	3.7429935	3.87427	14.9581	406.5415

Capture 5.1

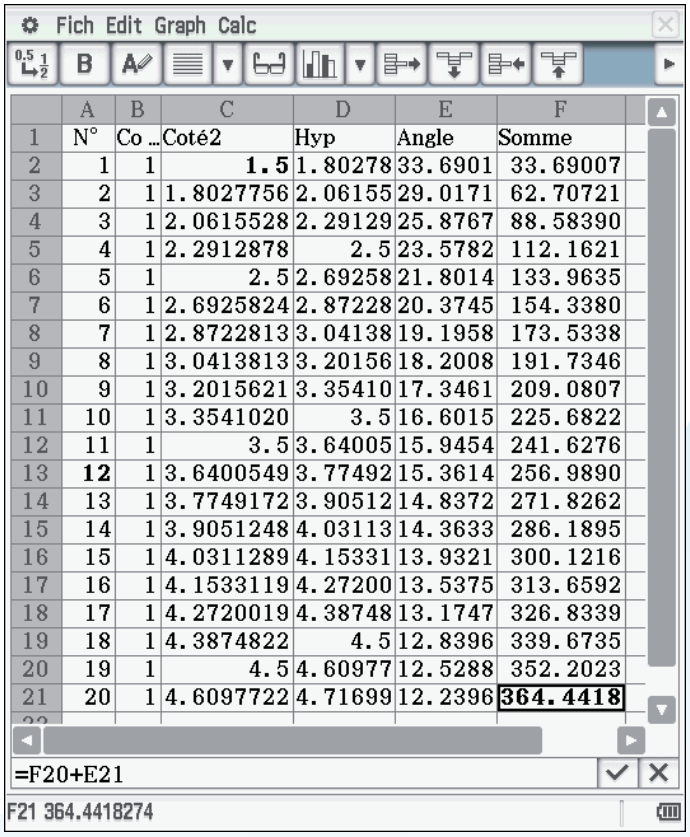
Capture 5.1 : nous pouvons conclure qu'un minimum de 12 triangles sont nécessaires pour avoir une construction acceptable.

Un nombre maximum de triangles ?

Arbitrairement, nous allons nous contraindre à rechercher des solutions pour une construction ayant au maximum 20 triangles. La marge d'erreur découverte pour le cas 17 permet de conclure qu'il est incertain d'aller au-delà.

Quel rapport sera notre borne supérieure ?

Encore une fois, le tableur va nous offrir la réponse :



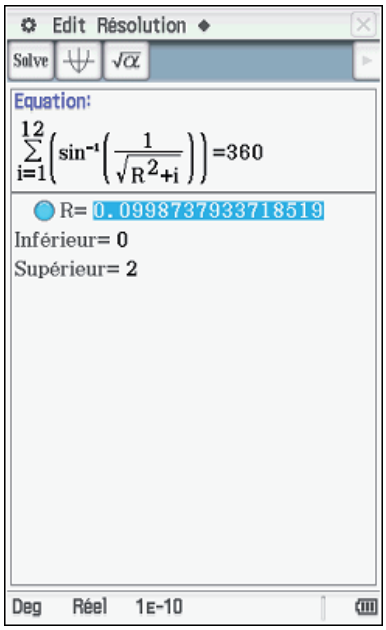
	A	B	C	D	E	F
1	N°	Co …	Coté2	Hyp	Angle	Somme
2	1	1	**1.5**	1.80278	33.6901	33.69007
3	2	1	1.8027756	2.06155	29.0171	62.70721
4	3	1	2.0615528	2.29129	25.8767	88.58390
5	4	1	2.2912878	2.5	23.5782	112.1621
6	5	1	2.5	2.69258	21.8014	133.9635
7	6	1	2.6925824	2.87228	20.3745	154.3380
8	7	1	2.8722813	3.04138	19.1958	173.5338
9	8	1	3.0413813	3.20156	18.2008	191.7346
10	9	1	3.2015621	3.35410	17.3461	209.0807
11	10	1	3.3541020	3.5	16.6015	225.6822
12	11	1	3.5	3.64005	15.9454	241.6276
13	**12**	1	3.6400549	3.77492	15.3614	256.9890
14	13	1	3.7749172	3.90512	14.8372	271.8262
15	14	1	3.9051248	4.03113	14.3633	286.1895
16	15	1	4.0311289	4.15331	13.9321	300.1216
17	16	1	4.1533119	4.27200	13.5375	313.6592
18	17	1	4.2720019	4.38748	13.1747	326.8339
19	18	1	4.3874822	4.5	12.8396	339.6735
20	19	1	4.5	4.60977	12.5288	352.2023
21	20	1	4.6097722	4.71699	12.2396	**364.4418**

Capture 5.2

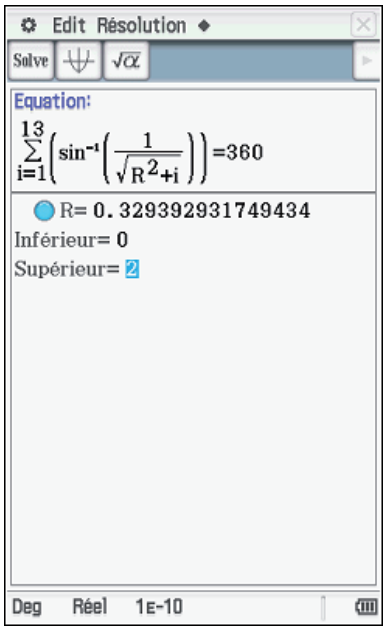
Capture 5.2 : notre recherche pourra se situer pour :

$$\mathbf{0.1} < R < 1.5$$

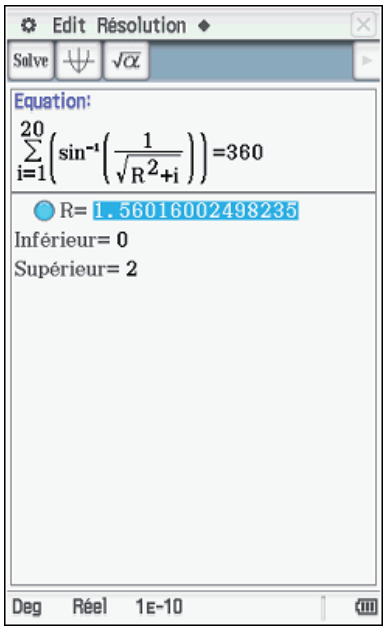
Utilisation du mode de résolution pour quelques cas :



Capture 5.3



Capture 5.4

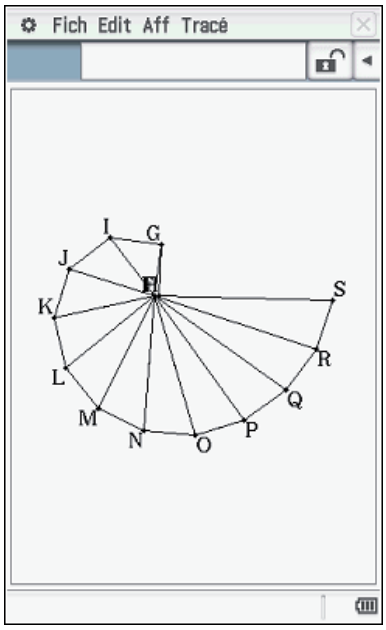


Capture 5.5

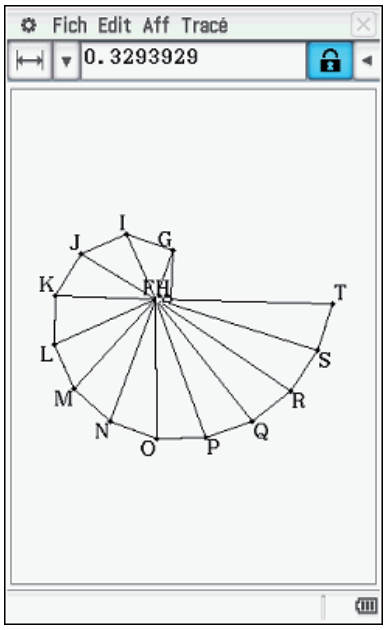
Capture 5.3 : pour 12 triangles on trouve une rapport d'environ : $R \approx 0{,}09987$

Capture 5.4 : pour 13, $R \approx 0{,}3239$. C'est cet exemple que nous allons injecter dans la construction géométrique ci-dessous.

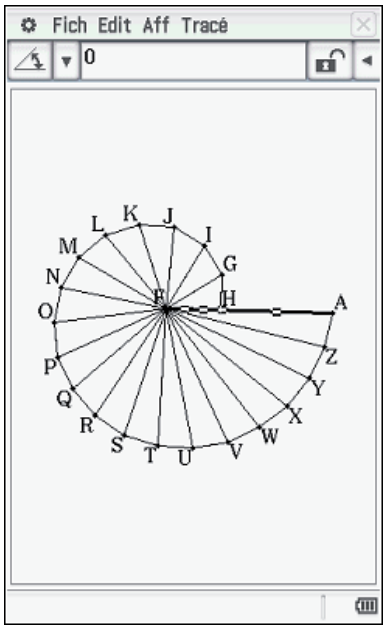
Capture 5.5 : pour 20 triangles, $R \approx 1{,}56$. Une valeur proche de notre travail préparatoire au tableur.



Capture 5.6



Capture 5.7

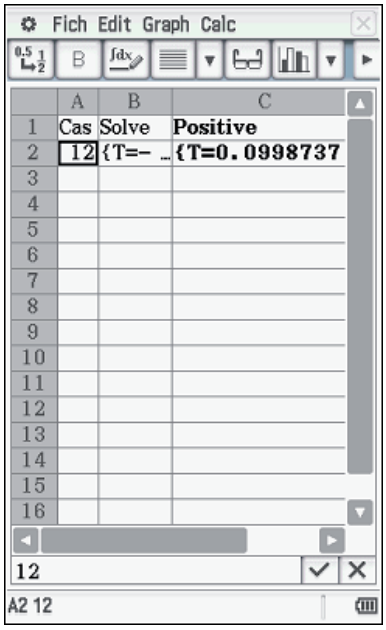


Capture 5.8

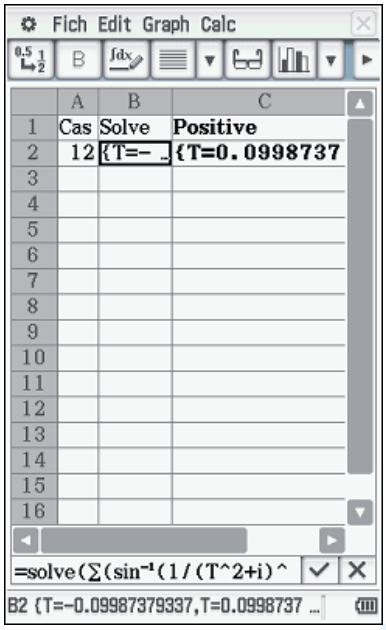
Capture 5.7 : la géométrie dynamique nous permet de visualiser les cas (ici, le cas 13) et de vérifier si l'angle est assez proche de 360 pour qu'il en devienne négligeable visuellement.

Utilisation du tableur pour tous les cas recherchés :

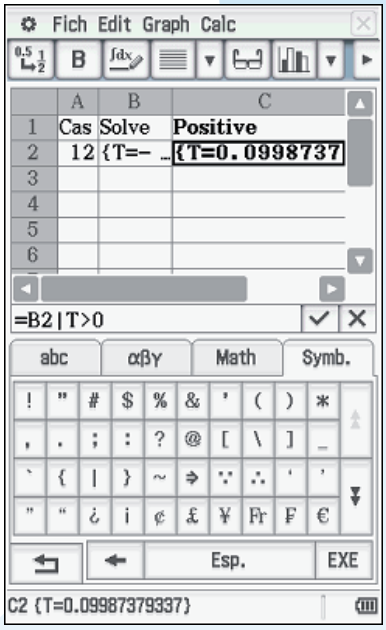
Pour ne pas avoir à répéter la recherche, nous pouvons proposer un calcul direct via le tableur et la résolution CAS qui y est possible.



Capture 5.8



Capture 5.9



Capture 5.10

Les trois colonnes utiles sont définies de la sorte :

La colonne A représente le cas recherché, par exemple ici, 12 triangles à construire.

La colonne B permettra de faire rechercher la solution voulue via la formule :

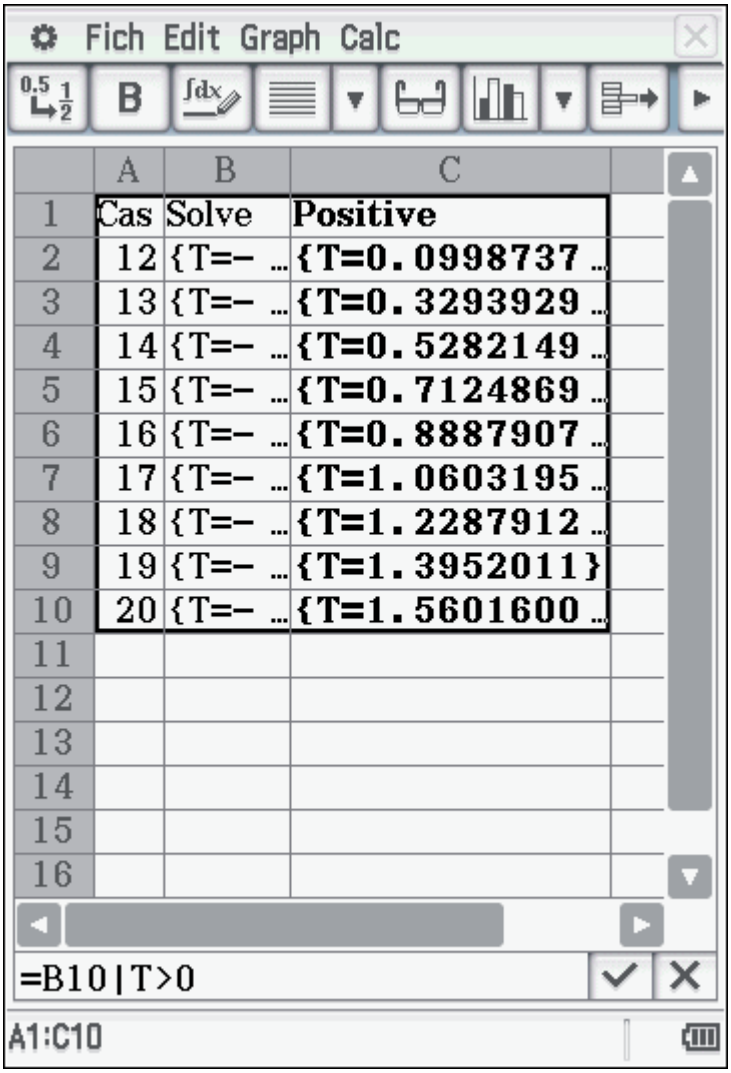
$$B2 = solve(\sum_{i=1}^{A2} \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{T^2+i}}=360,T)$$

La colonne C va nous permettre de faire apparaître la solution positive grâce à la touche « *sachant* » notée sur le clavier tactile par le symbole | :

$$C2 = B2|\, T > 0$$

Il suffit de recopier la première ligne pour trouver les valeurs suivantes :

$$12\ triangles\ pour\ R = 0.0998737933718655$$
$$13\ triangles\ pour\ R = 0.329392931749436$$
$$14\ triangles\ pour\ R = 0.528214910436166$$
$$15\ triangles\ pour\ R = 0.712486985902883$$
$$16\ triangles\ pour\ R = 0.888790784293691$$
$$\mathbf{17\ triangles\ pour\ R = 1.06031955129569}$$
$$18\ triangles\ pour\ R = 1.22879127544395$$
$$19\ triangles\ pour\ R = 1.39520110000128$$
$$20\ triangles\ pour\ R = 1.56016002498241$$

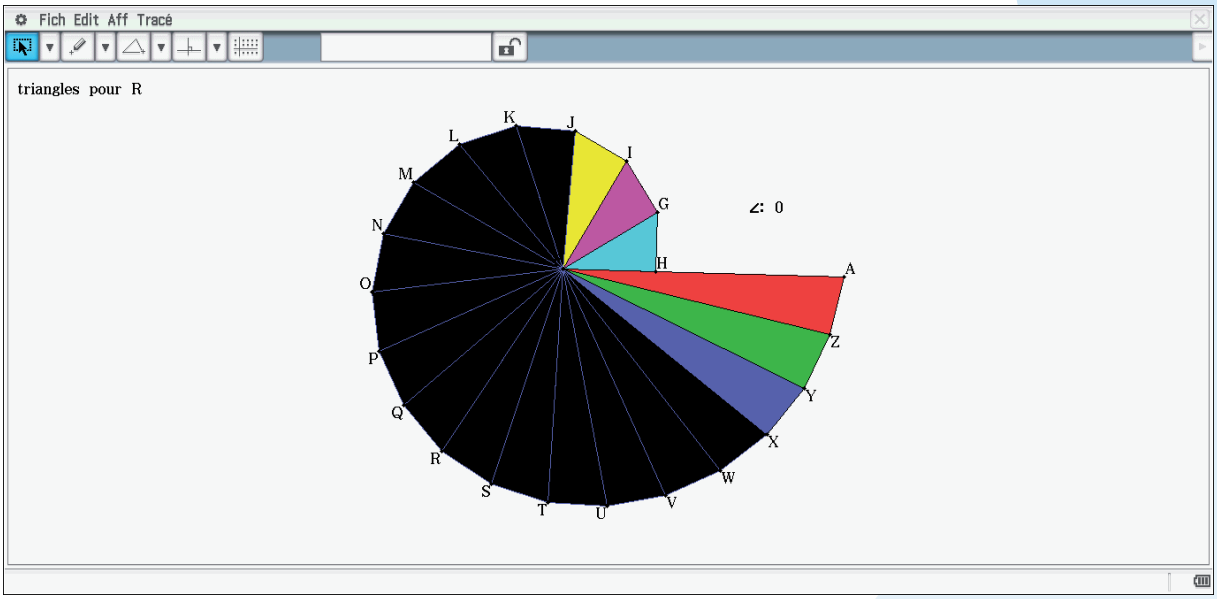


Capture 5.13

Capture 5.13 : ainsi, en copiant-collant la ligne précédente. Il est possible de faire calculer les différentes configurations recherchées.

Pour aller plus loin ?

Que pouvons-nous affirmer des valeurs trouvées ? Un travail sur la marge d'erreur répétée dans le calcul permet de conclure que rien n'affirme que la valeur trouvée numériquement est bien la valeur exacte recherchée ? Il est simplement possible de s'accorder sur le fait que pour chaque nombre de triangles voulus : une *bonne valeur* existe et une *belle approximation* est proposée par la calculatrice.



Capture 5.14

Pour un triangle de départ rectangle mais non isocèle avec un rapport d'environ 1,56, une construction géométrique arrive au bout de 20 triangles à un escargot se refermant sur lui-même.

Racine carrée d'un nombre entier

L'escargot de Cyrène vu précédemment va nous permettre d'engager une réflexion sur la notion de racine carrée.

Il est possible en répétant cette construction spiralée de faire dessiner la valeur de n'importe quel nombre entier sous le radical. Mais, est-ce une bonne méthode ?

Bien évidemment que non : la longueur de la répétition a une forte probabilité d'aboutir à des erreurs d'approximation. N'y a-t-il pas d'autres voies pour aborder la racine carrée d'un nombre entier et son approximation …

Une analyse décimale

Par contre, nous pouvons le dévier de sa fonction primaire en s'imposant un nouvel axe de réflexion :

> De l'extraction de la racine carrée en passant par une dichotomie, peut-on programmer quelques algorithmes permettant de retrouver une valeur approchée d'une racine demandée ?
>
> **Questionnement 1**

Une vision géométrique

> N'avons-nous pas une méthode rapide et pratique pour construire n'importe quelle racine carrée d'un nombre sans avoir à utiliser les étapes de l'escargot de Cyrène ?
>
> **Questionnement 2**

Racine Carrée, questionnement 1

De l'extraction à l'algorithmique

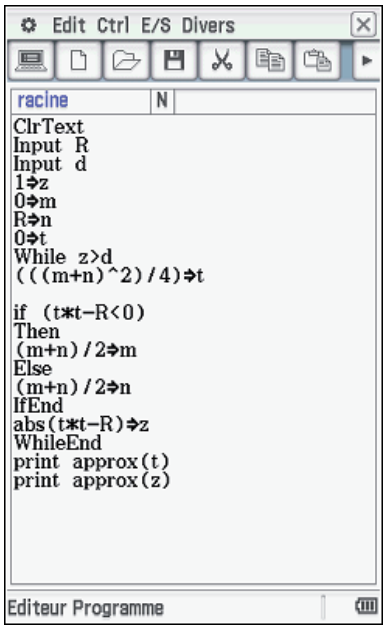
Dans un premier temps nous allons programmer la version la plus simple permettant de retrouver la valeur d'une racine carrée demandée sans utiliser la touche de la calculatrice.

Algorithme par Dichotomie (1)

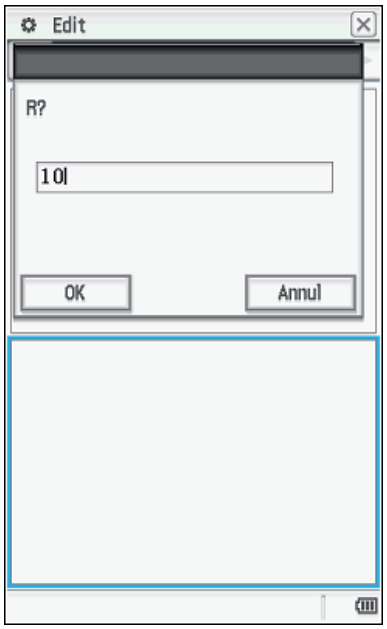
Dans ce premier programme, nous allons proposer cette idée de dichotomie.

On cherche une valeur comprise entre 0 et le nombre demandé.
Puis, on coupe cet espace en deux. Il suffit de vérifier où se situe le carré de ce milieu. S'il dépasse la valeur recherchée, notre nouvel intervalle est trop grand (on utilise la borne supérieure) sinon notre domaine est trop petit (on utilise la borne inférieure).

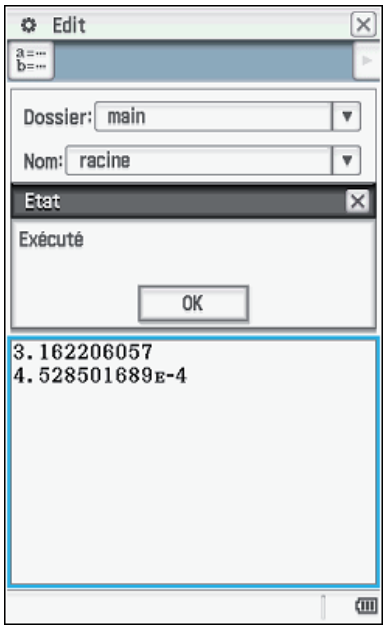
```
Demander      RACINE
Demander      PRECISION

MINI = 0
MAXI = RACINE

DEGRE = 1

Tant que      DEGRE > PRECISION :

        MILIEU = (MINI+MAXI)/2
        DEGRE = VALEUR ABSOLUE(MILIEU^2 – R)

        Si      MILIEU ^2  - R < 0
                alors    MINI = MILIEU
        Sinon MAXI =MILIEU

Fin de condition

Afficher  MILIEU
Afficher  PRECISION
```



Capture 1.1



Capture 1.2



Capture 1.3

Capture 1.1 : Voici un programme sur notre calculatrice permettant de reprendre l'algorithme précédent.

Notons les variables attribuées dans ce programme :

R : *Racine à calculer*
d : *degré de précision attendue*

z : *degré de précision calculé*
m : *borne inférieure*
n : *borne supérieur*

t : *milieu entre les bornes [m ; n]*

Capture 1.2 : en pratique, nous cherchons la valeur de $\sqrt{10}$ à 0.0001 près

Capture 1.3 : et on trouve via le programme :

$$\sqrt{\mathbf{10}} \approx \mathbf{3.1622}$$

Algorithme par méthode d'extraction (2)

Extraction de la racine carrée à la main

Pour calculer une racine carrée d'un nombre, il suffit de poser une « *division* » nommée extraction de racine. Reprenons le calcul de la racine carrée de 10 :

							Explications :
1	0				3,162?		3^2=9 <10
-	9						
	1	00			6 1 × 1	= 61	<100
-		61					100 - 61 = 39
		39	00		62 6 × 6	= 3756	<3900
-		37	56				3900 - 3756 = 144
		01	44	00	6 32 2 × 2	= 12644	<14400
-		01	26	44			14400 - 12644 = 1756
			17	56	6324 ? × ?	= (…)	<175600
							175600 – (…)

Capture 2.0

Capture 2.0 : voici une idée d'explication de cette méthode :

Dans un premier temps, il faut rechercher le plus grand nombre dont le carré se rapproche à 10 sans le dépasser. Ici, on trouve 3.
Puis, on calcule le premier reste :

$$10 - 3^2 = 1$$

On abaisse deux zéros (sur le même principe que pour une division posée).

$$100$$

Pour le chiffre suivant : il faut doubler le nombre approchant la racine de 10 soit pour l'instant 3.
Ce qui donne :

$$6$$

Et, rechercher le chiffre tel que le produit suivant se rapproche au mieux du reste trouvé:

$$\mathbf{6}\,?\times ? \leq \mathbf{100}$$

Ici, on trouve le chiffre 1.

Donc, 3,1 est une extraction possible de la racine carrée de 10.

Il faut calculer le nouveau reste :

$$100 - 61 \times 1 = 39$$

Abaisser deux zéros :

$$3900$$

Et, doubler le résultat tronqué au dixième, pour recommencer avec :

$$62? \times ? \leq 3900$$

On trouve le chiffre 6.

Et ainsi de suite (…)

En voici, l'algorithme :

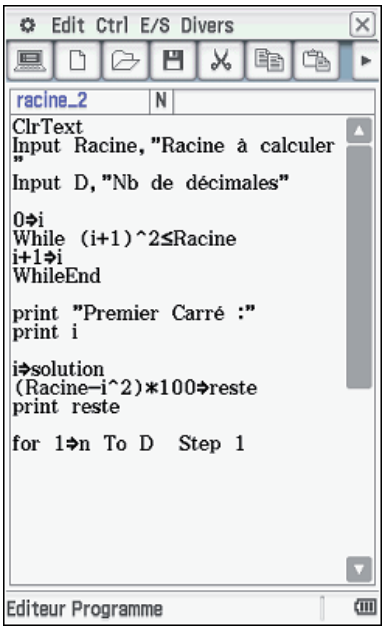
Demander RACINE
Demander PRECISION

i=0
Tant que (i+1) *(i+1)<RACINE :
INCREMENTE i
Fin de condition
reponse=i

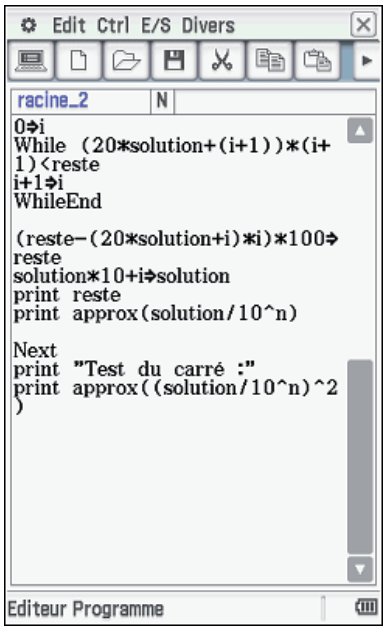
reste = RACINE-reponse^2

Boucle n=1 a PRECISION
reste=reste*100
i=0
Tant que (reponse*2*10+i)*i<reste :
INCREMENTE i
Fin de condition
reste=reste-(reponse*2*10+i)*i
reponse=reponse*10+i
Fin de boucle

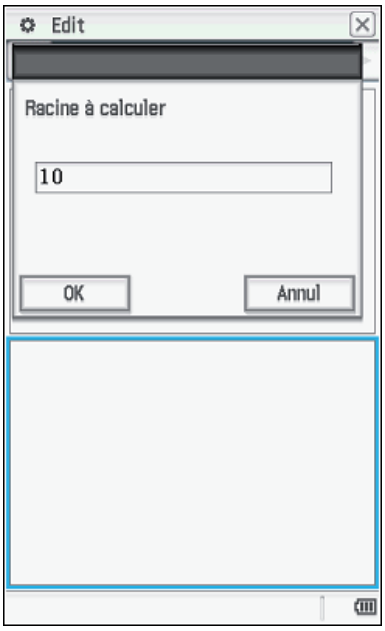
Afficher reponse/10^PRECISION



Capture 2.1



Capture 2.2

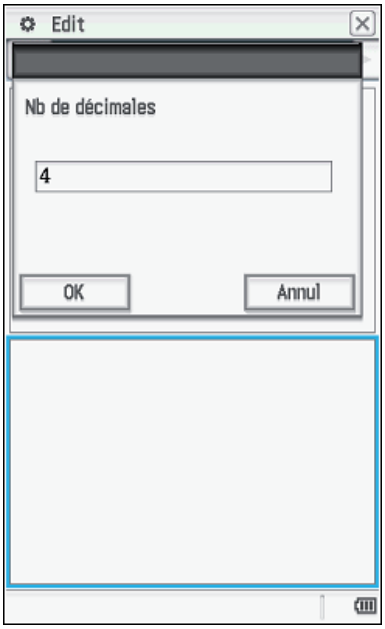


Capture 2.3

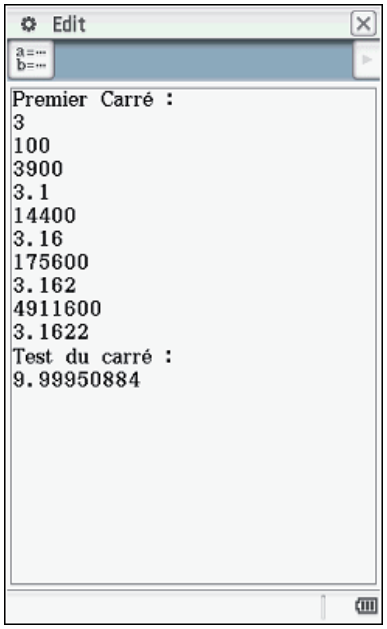
Capture 2.1 : voici la première partie du programme, il est à noter que nous n'allons pas simplement visualiser la réponse mais aussi les étapes que nous aurions dû faire apparaître sur un calcul posé.

Capture 2.2 : la condition pour obtenir un chiffre maximal inférieur au reste sera traduit par l'utilisation d'une boucle *while … whilend.*

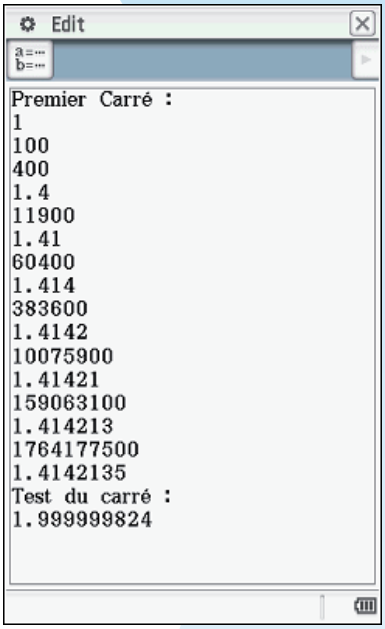
Capture 2.3 : il ne reste qu'à tester le programme pour une valeur déjà calculée soit, $\sqrt{10}$.



Capture 2.4



Capture 2.5



Capture 2.6

Capture 2.4 : on choisit 4 chiffres après la virgule (attention, il s'agit d'une troncature) .

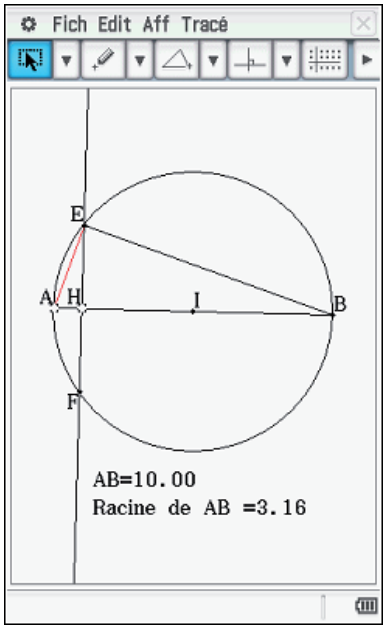
Capture 2.5 : on retrouve les étapes du calcul posé (en capture 2.0) ainsi qu'une valeur tronquée au millième.

Capture 2.6 : un exemple avec $\sqrt{2}$.

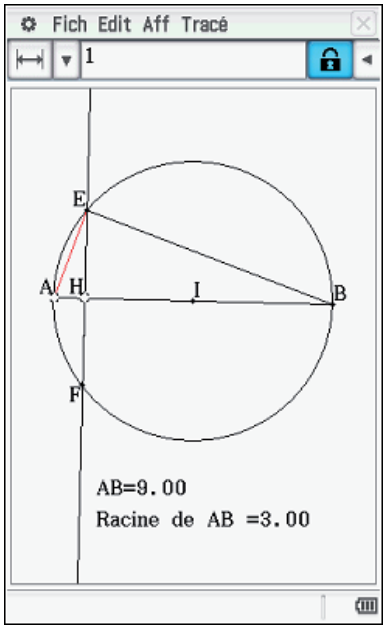
Une vision géométrique, questionnement 2

De la méthode de Cyrène à une vision plus simple

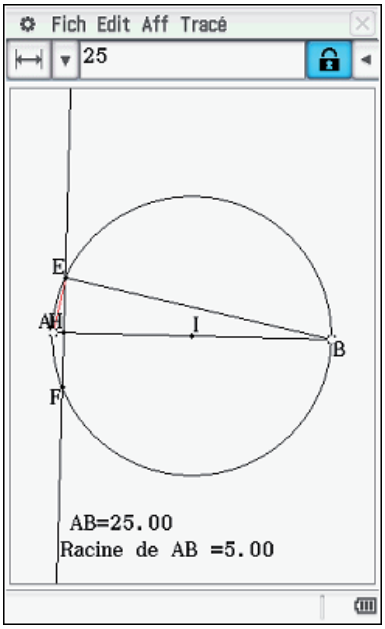
Il est facile de faire dessiner la racine carrée d'un nombre entier en utilisant les instruments de géométrie classiques.



Capture 3.1



Capture 3.2



Capture 3.3

Soit [AB] un segment mesurant la racine que l'on veut construire (ici, AB).

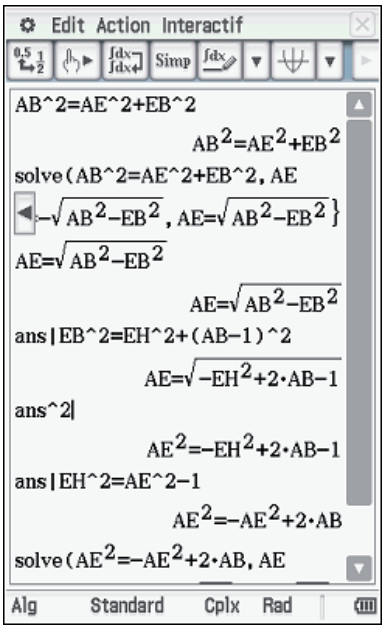
Soit H un point de [AB] tel que AH=1.
La perpendiculaire à (AB) passant par H coupe le cercle de diamètre [AB] en un point que l'on nomme E.

La longueur AE mesure $\sqrt{AB}$.

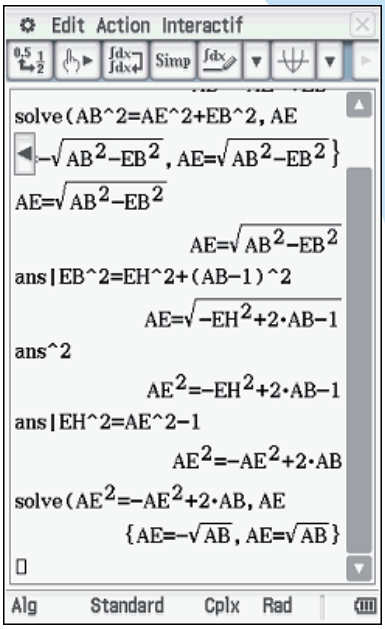
Capture 3.1 : par exemple, on retrouve $\sqrt{10}$ dans ce premier exemple.

Capture 3.2 : le fait d'avoir une figure dynamique permet de redéfinir facilement la longueur AB et donc, d'obtenir une vérification avec AB=9.

Capture 3.3 : il est possible de faire inscrire sur l'écran des expressions. Du coup, même si les longueurs sont grandes par rapport à l'unité, la lecture de AE reste efficace.



Capture 3.4



Capture 3.5

Capture 3.4 : le calcul formel de cette calculatrice permet de travailler avec des lettres. Cela semble logique mais, il est à noter que l'association de lettres est considérée comme une variable. Ainsi, nul besoin de redéfinir la longueur AE, il suffit de l'utiliser.

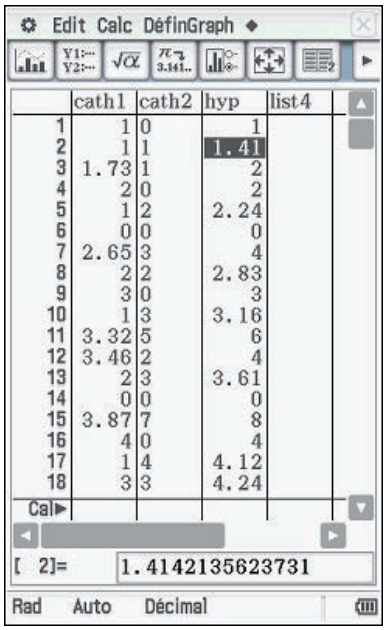
Capture 3.5 : une piste de résolution directement sur la calculatrice est agréable, à charge au lecteur de la formaliser.

Pour aller plus loin

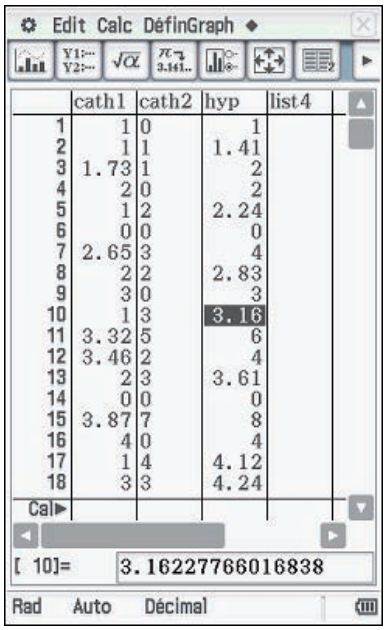
Triplets de Pythagore ou construction rapide ?

Un questionnement permet le lien entre les deux problèmes : celui de la vision algorithmique d'une racine carrée et celui de sa construction rapide. A savoir :

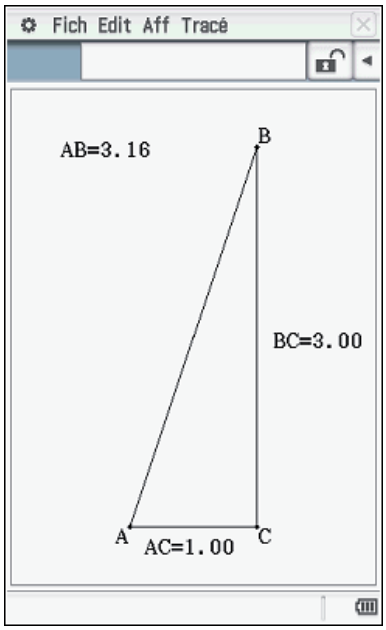
On peut s'interroger sur la possibilité de construire un triangle rectangle donnant une racine carrée voulue. Peut-on trouver pour les 100 premiers nombres entiers, un tel triangle ?



Capture 4.1



Capture 4.2

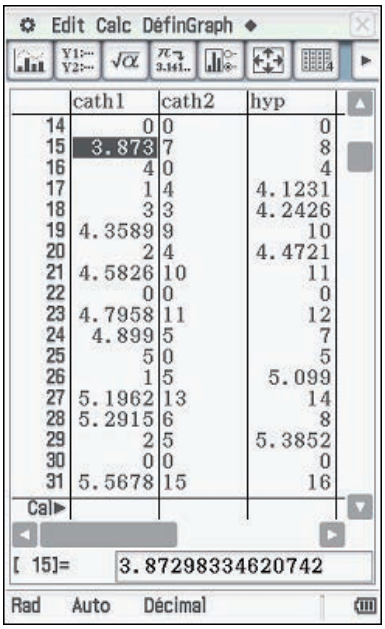


Capture 4.3

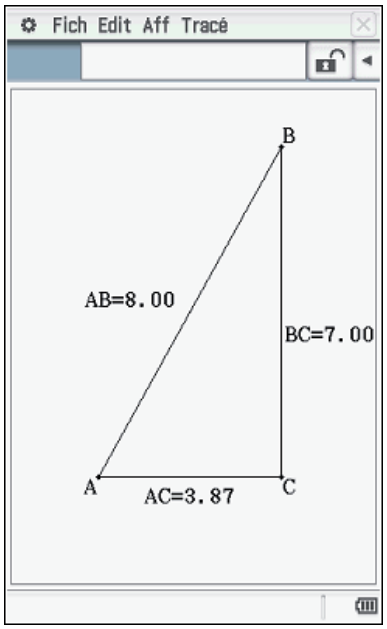
Capture 4.1 : Voici la liste des 18 premiers nombres entiers. Par exemple, on peut y lire que $\sqrt{2}$ peut se construire (sur la seconde ligne) via un triangle rectangle isocèle.

Capture 4.2 : Ainsi, $\sqrt{3}$ est simplement l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant 1 et 3 comme longueurs de cathètes.

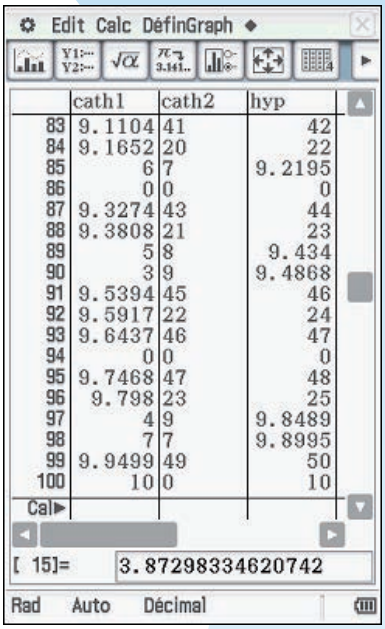
Capture 4.3 : Ce que nous confirme la figure.



Capture 4.4



Capture 4.5

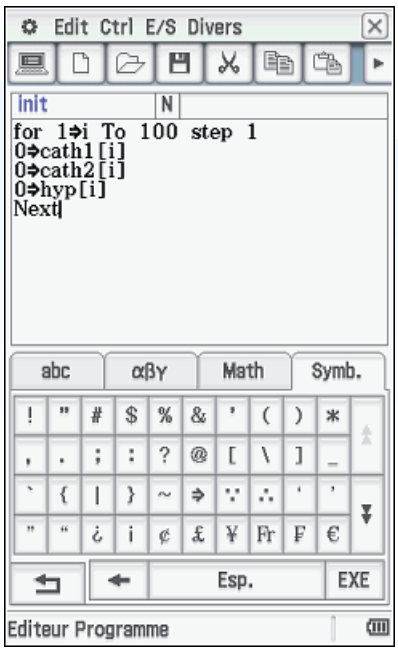


Capture 4.6

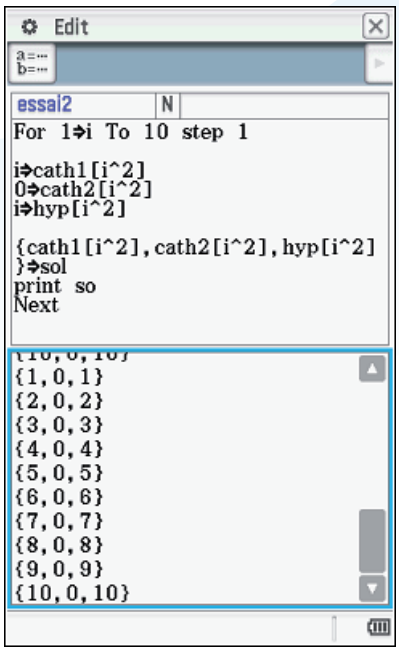
Capture 4.4 : $\sqrt{15}$ sera construit via un triangle rectangle dont l'hypoténuse vaut 8 et l'un des côtés 7.

Capture 4.5 : une valeur approchée est ainsi donnée par la construction.

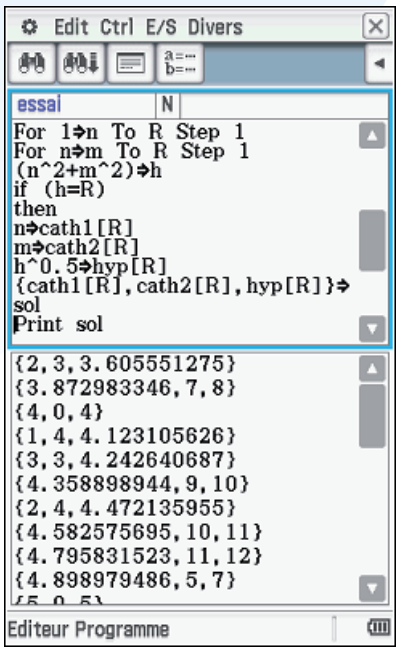
Capture 4.6 : la question qui se pose : comment sont apparues ces listes ? Combien de racines carrées n'y figurent pas ? (Par exemple, $\sqrt{94}$ n'est pas définie par une construction d'un seul triangle rectangle).



Capture 4.7



Capture 4.8



Capture 4.9

Capture 4.7 : il serait inapproprié de ne pas répondre à cette question. En voici quelques pistes. Le premier programme permet simplement d'initialiser les 100 premiers termes des listes à utiliser.

Capture 4.7 : il serait inapproprié de ne pas répondre à cette question. En voici quelques pistes. Le premier programme permet simplement d'initialiser les 100 premiers termes des listes à utiliser.

Capture 4.8 : puis, inutile de chercher un triangle pour des carrés parfaits.

Capture 4.9 : enfin, il nous faut gérer deux algorithmes, l'un qui cherche des hypoténuses à valeurs entières et l'autre l'un des cathètes. Le tout sans surcoût d'énergie pour la machine. Si dans la liste, un calcul a déjà été trouvé, inutile de refaire une recherche. L'association des différents modes de la calculatrice permettra d'avoir en mode *statistique*, le résultat final recherché.

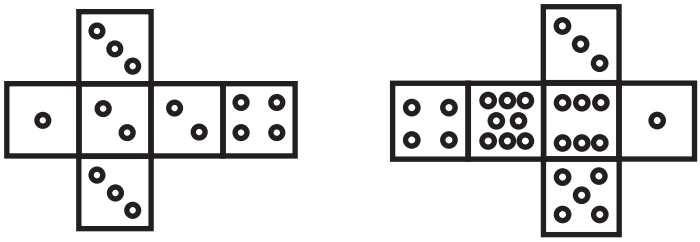
A vos machines !

Notes personnelles

Somme de deux dés

Intéressons-nous à la somme de deux dés. Il existe des dés ayant une particularité : leur somme à la même probabilité qu'avec des dés classiques.

Ceux sont les dés de Sicherman dont voici ci-dessous la forme développée :



Oserions-nous les utiliser à la place des classiques ?

Un point de vue en probabilité

Comparons les différents cas entre les dés classiques et les dés de Sicherman via le tableur pour avoir une représentation en tableau croisé.
Et, recherchons quelle est la somme ayant la plus forte probabilité d'être tirée.

Questionnement 1

Un point de vue en expérimentation

Attachons-nous à faire de ce tirage aléatoire une expérimentation avec un nombre fini de lancés.

Questionnement 2

Probabilité, questionnement 1

Travaillons sur les différentes possibilités dans les deux familles de dés

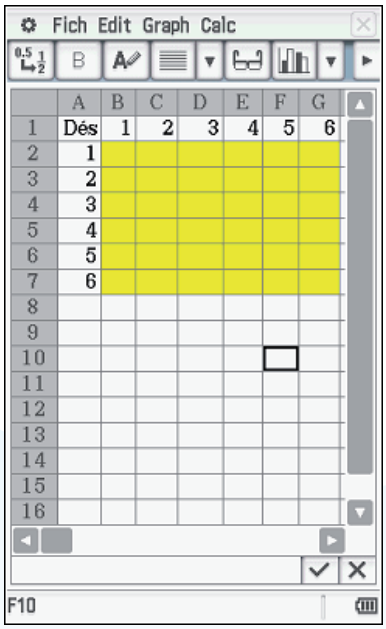
Cas classique :

Pour les dés classiques, le tableur va permettre de nous faire visualiser tous les cas possibles.

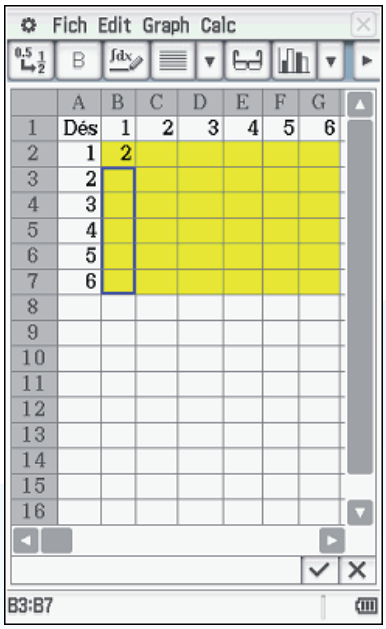
Ainsi, la probabilité sera facilement calculable car, l'environnement probabiliste est discret et déterminé :

$$P(Somme = n) = \frac{nb\ de\ cas\ donnant\ n}{nb\ de\ cas\ total}$$

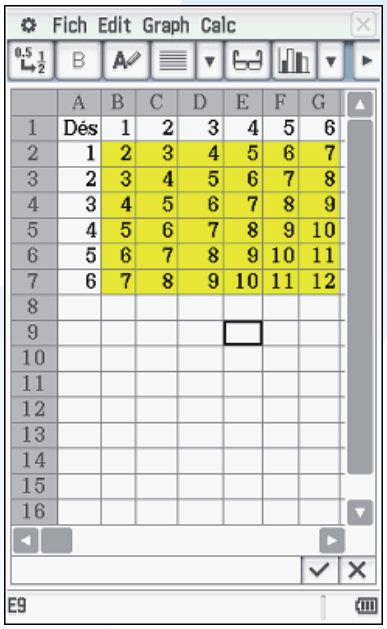
Tableau des possiblités :



Capture 1.1



Capture 1.2



Capture 1.3

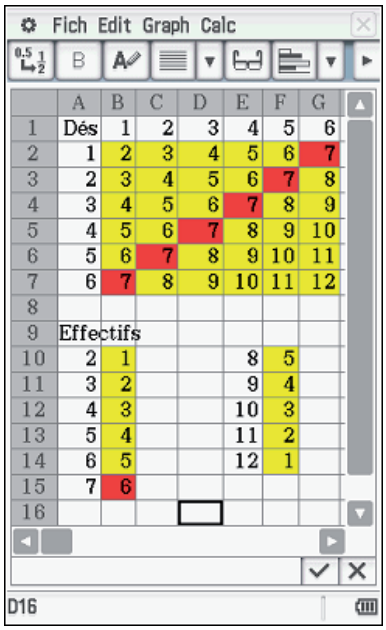
Capture 1.1 : dans le mode Tableur de la calculatrice, il suffit de créer un tableau à double entrée.

Capture 1.2 : puis, d'y définir la somme en n'oubliant pas de « bloquer » les lignes et colonnes d'entrées pour qu'un copier/coller nous facilite la tâche :

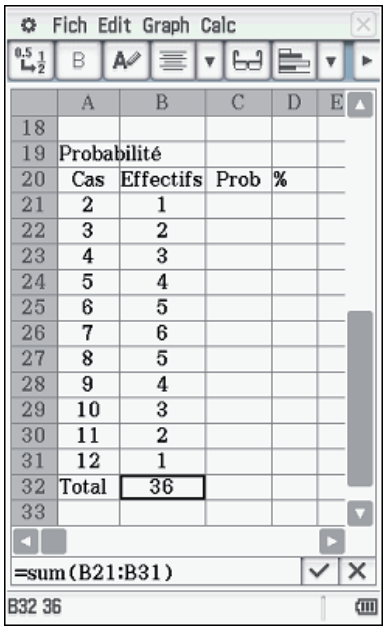
$$\boldsymbol{A2 = B\$1 + \$A2}$$

Capture 1.3 : enfin, on peut facilement copier la formule en A2 et la coller dans les cases selectionnées.

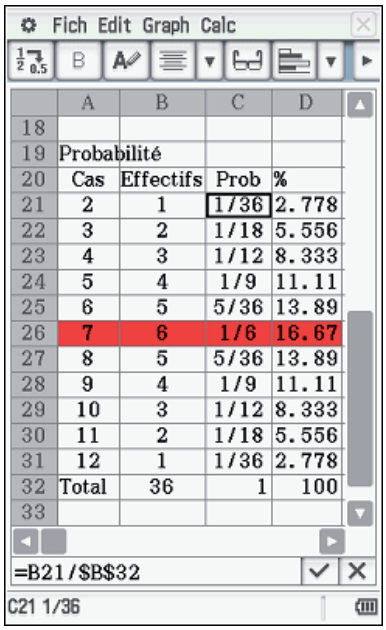
Calcul des probabilités :



Capture 1.4



Capture 1.5



Capture 1.6

Capture 1.4 : la lecture directe du tableau des possibilités nous donne la réponse pour le cas des dés classiques. L'utilisation des couleurs sur la tableau permet de repérer l'information principale à savoir :

$$P(Somme = 7) > P(somme = n \,|n \neq 7)$$

Capture 1.5 : attention, toutefois lors du calcul des probabilités de bloquer la case de l'effectif total B32:

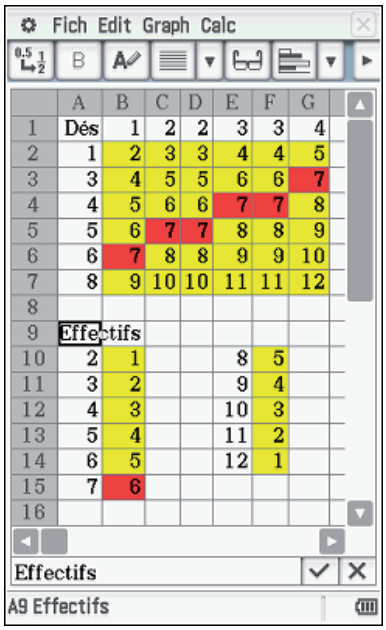
$$AC21 = \frac{B21}{\$B\$32}$$

Capture 1.6 : Il est à noter que le *mode tableur* permet d'avoir les valeurs sous une forme décimale ou sous une écriture fractionnaire.

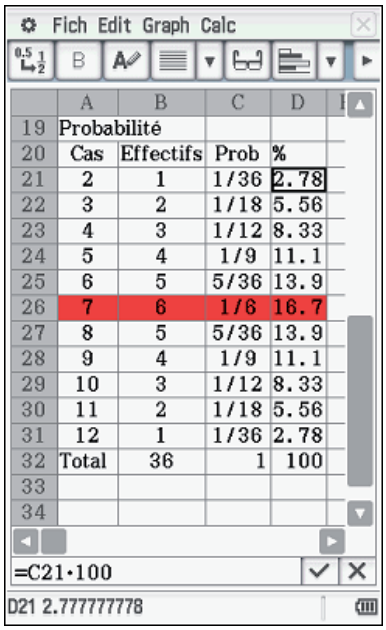
On trouve ainsi que la somme ayant la plus grande probabilité d'être tirée est le 7.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P(Somme = 7)} &= \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{36}} \\ &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} \\ &\approx \mathbf{16,7\ \%} \end{aligned}$$

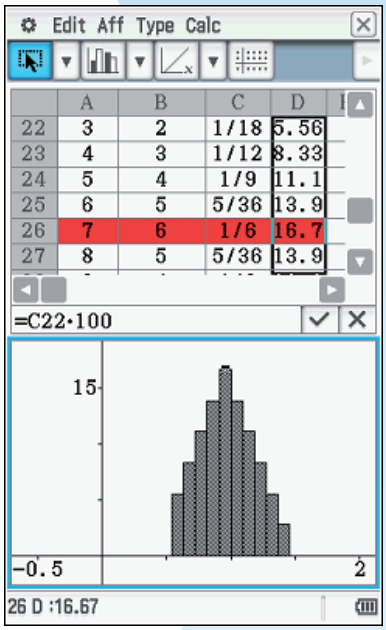
Cas des dés de Sicherman :



Capture 2.1



Capture 2.2



Capture 2.3

Capture 2.1 : il suffit de changer les valeurs du tableau croisé pour avoir les différentes combinaisons pour ces dés particuliers.

Capture 2.2 : nous retrouvons rigoureusement les mêmes tirages avec les dés de Sicherman et du coup, les mêmes probabilités qu'avec des dés classiques.

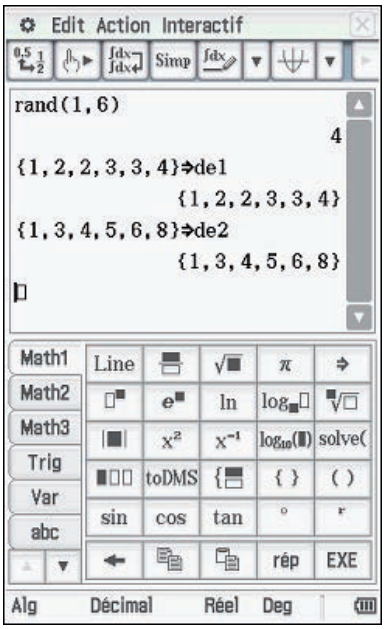
Il est donc possible de travailler avec un environnement différent pour ce type de tirage aléatoire.

Expérimentation, questionnement 2

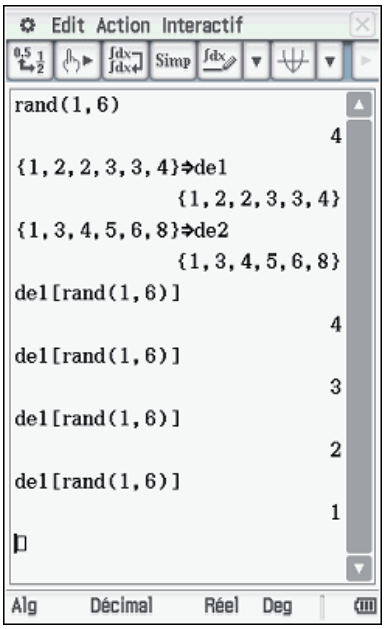
Tirages aléatoires

Nous allons expérimenter ce tirage aléatoire directement sur la calculatrice avec cette nouvelle famille de dés.

Capture 3.1



Capture 3.2



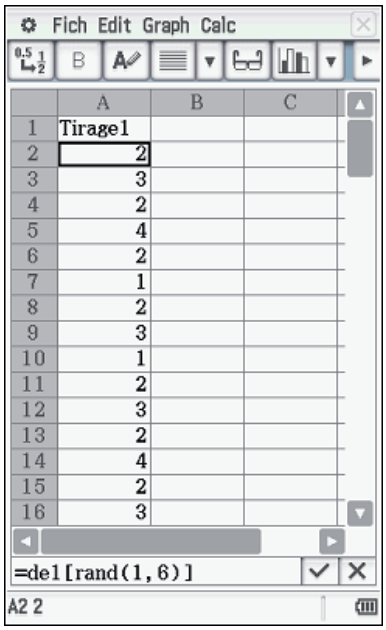
Capture 3.3

Capture 3.1 : la fonction rand(1,6) permet d'avoir un tirage pseudo-aléatoire de nombres entiers compris entre 1 et 6.

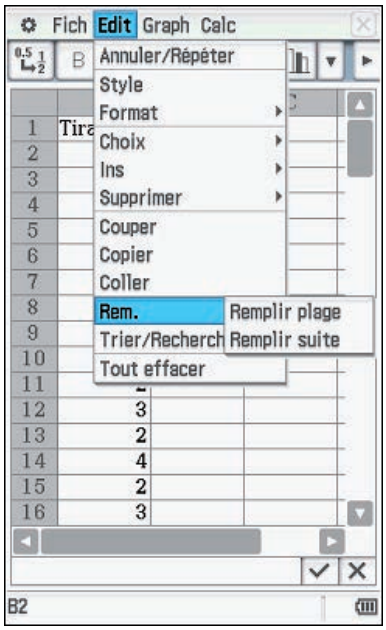
Capture 3.2 : dans le mode *Principale* de la calculatrice, nous pouvons définir les deux dés.

Capture 3.3 : Il suffit de faire tirer aléatoirement l'indice de chacune des listes créées pour avoir un tirage aléatoire des dés de Sicherman.

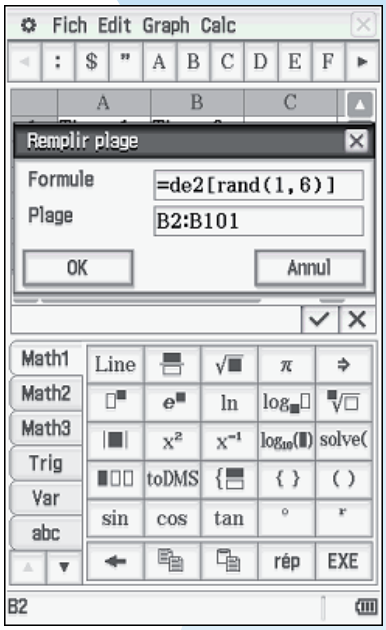
Expérimentation via le tableur



Capture 3.4



Capture 3.5



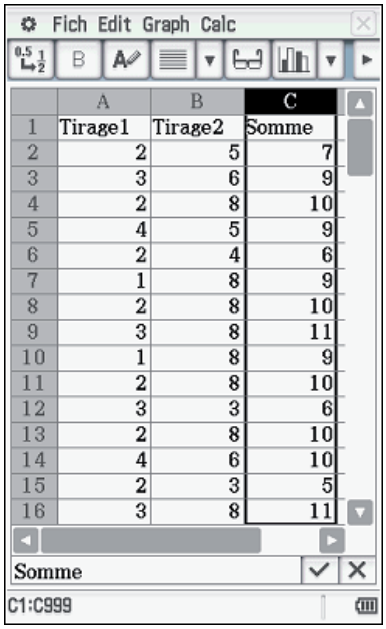
Capture 3.6

Capture 3.4 : dans le mode tableur, nous allons créer une série de tirages. Ici, la colonne A va représenter le lancé du premier dé. Comme le dé 1 est défini via le mode principal, il est facile de l'associer ici. Par exemple, la case B2 sera définie par :

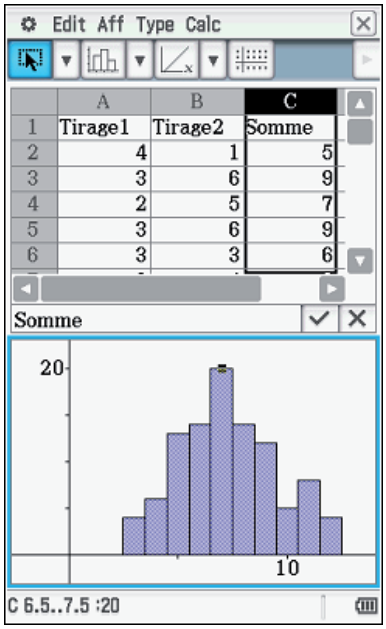
$$B2 = dé1\left[rand(1{,}6)\right]$$

Capture 3.5 : au lieu d'utiliser le copier/coller pour remplir chaque case d'une colonne. On peut directement utiliser la fonction *Remplir plage.*

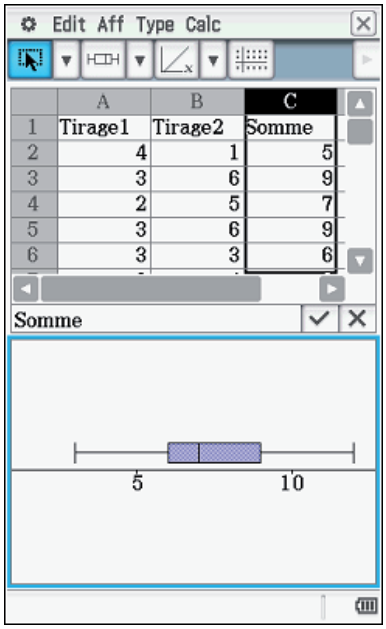
Capture 3.6 : et, ainsi proposer 100 tirages des deux dés.



Capture 3.7



Capture 3.8



Capture 3.9

Capture 3.7 : la colonne C représentera la somme recherchée.

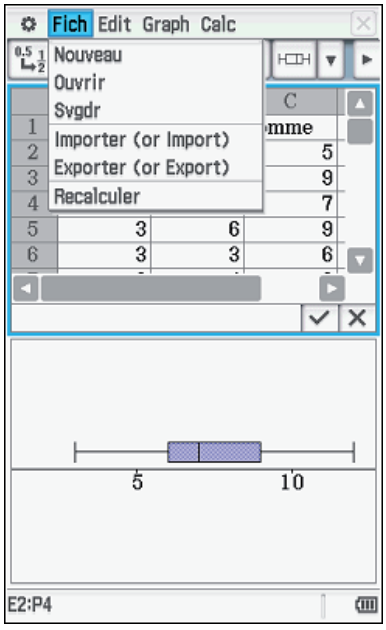
$$C2 = B2 + A2$$

Capture 3.8 : en la sélectionnant, il est possible d'avoir la répartition des expériences.

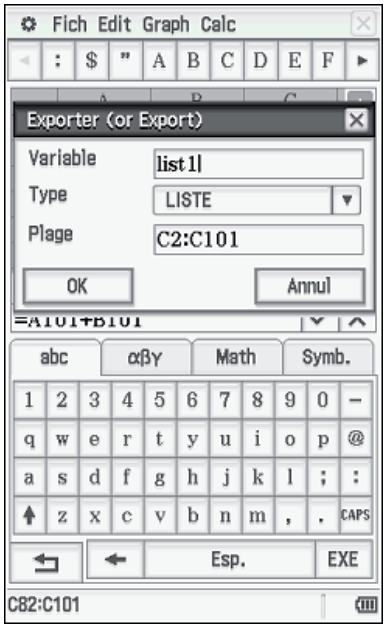
Capture 3.9 : voire, un diagramme en moustache.

Analyse dans le mode Statistique

Capture 4.1



Capture 4.2

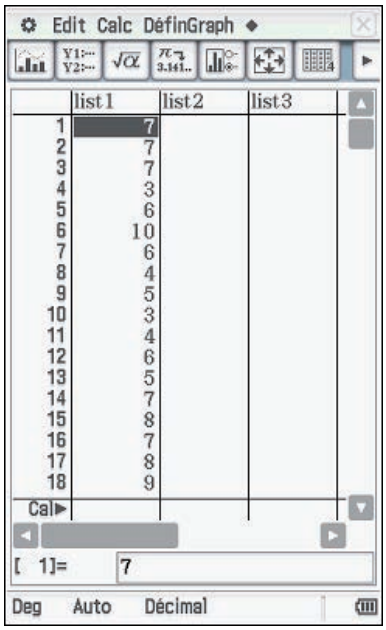


Capture 4.3

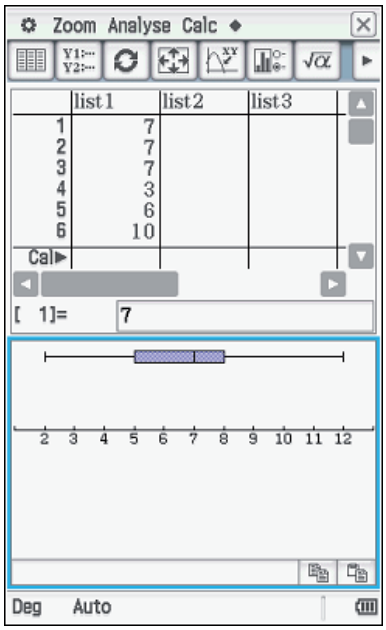
Capture 4.1 : les différents menus de la calculatrice permettent une gestion commune des résultats calculés.

Capture 4.2 : ainsi, il est possible d'exporter une colonne de valeur du mode tableur au mode statistique.

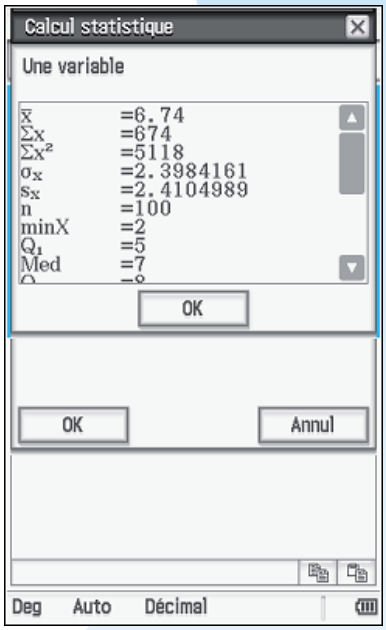
Capture 4.3 : définissons la liste qui va accueillir les 100 tirages effectués. Ici, la liste 1.



Capture 4.4



Capture 4.4

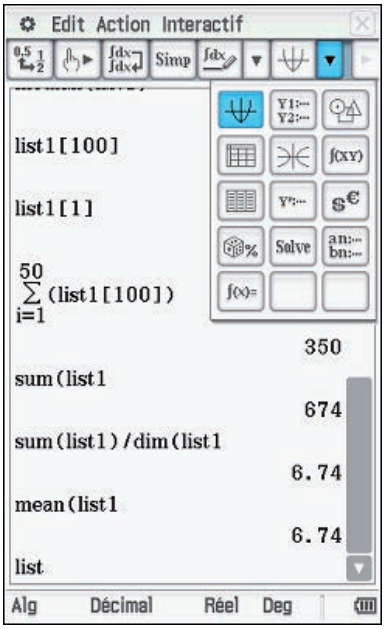


Capture 4.5

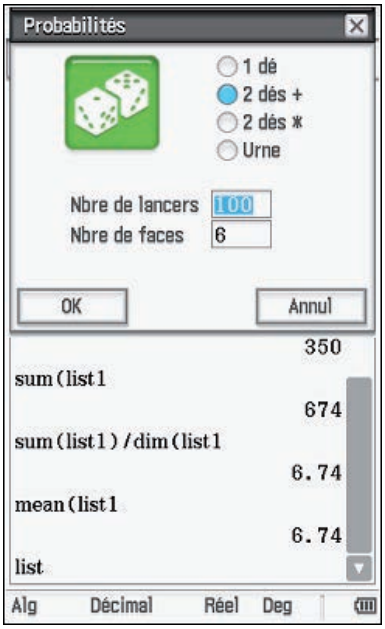
Capture 4.4 : dans le mode statistique, la *list1* est visible comme prévue par l'exportation.

Capture 4.5 : nous retrouvons le diagramme à moustache visualisé précédemment. Les sommes sont bien dans la plage de valeurs allant de 2 à 12.

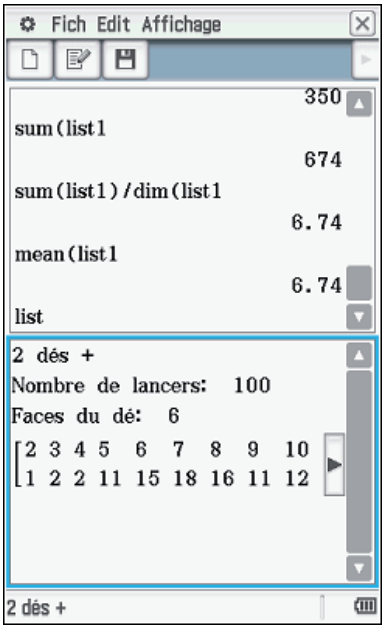
Capture 4.6 : une analyse statistique à une variable est désormais possible. La médiane est de 7 comme l'avait affirmé le travail théorique précédant.



Capture 4.7



Capture 4.8



Capture 4.9

Capture 4.7 : dans le mode principal, on peut directement calculer les résultats statistiques d'une liste. Ainsi, on retrouve que la moyenne pour nos 100 tirages est de 6.74 via le calcul :

$$mean(list1)$$

Un mode adapté ?

Capture 4.8 : la calculatrice est prévue pour gérer ce type de tirage directement. Bien entendu, non pas avec les dés de Sicherman mais avec des dés classiques. Il suffit de choisir le nombre de tirages voulus ainsi que le nombre de faces pour chacun des dés.

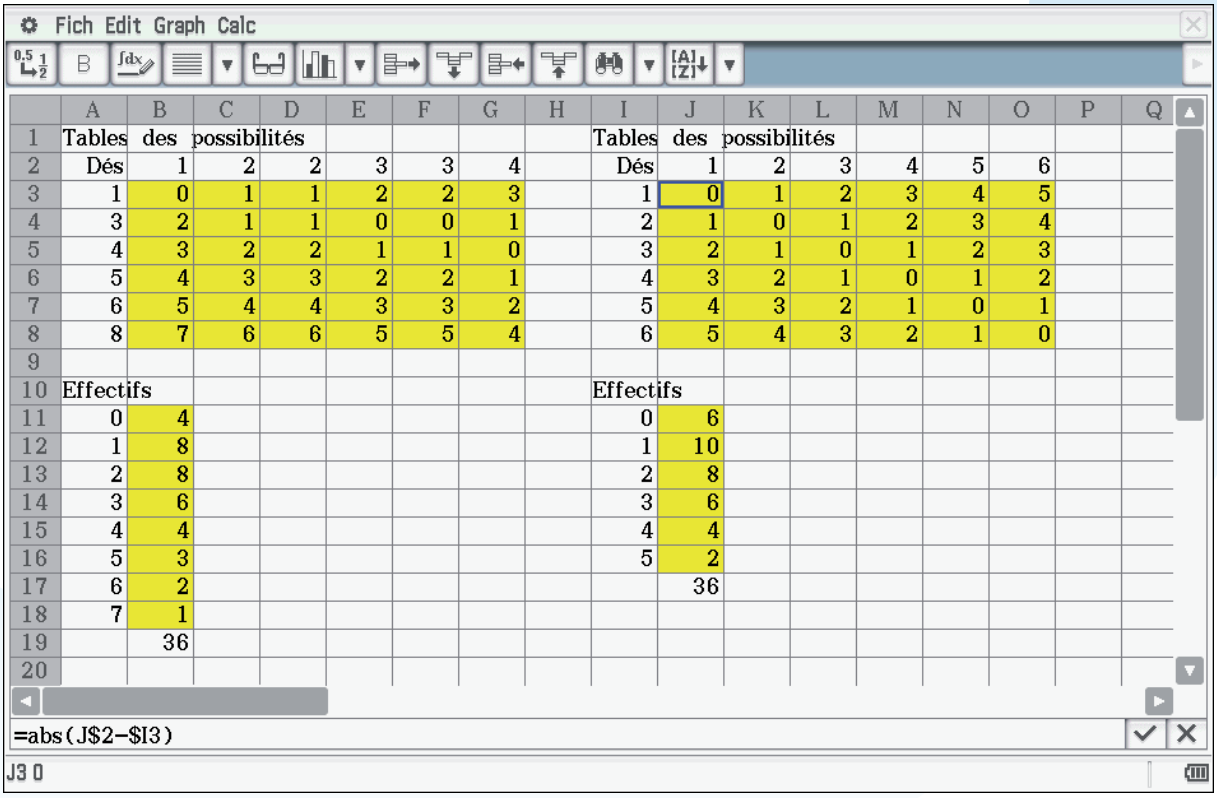
Capture 4.9 : un tableau de valeurs apparaît après calculs.
On y retrouve via l'expérimentation qu'il est préférable de choisir 7 comme somme de deux dés lors d'un tel tirage aléatoire.

Pour aller plus loin

Deux familles de dés pour des résultats identiques ?

Un travail autour de la différence au lieu de la somme permettra de comprendre l'utilité de définir la situation de départ.

Ainsi, si les dés de Sicherman se révèlent identiques à des dés classiques pour le tirage aléatoire d'une somme, il n'en est rien pour la valeur absolue de la différence. Comme le confirme le tableau suivant :



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	Tables	des	possibilités						Tables	des	possibilités						
2	Dés	1	2	2	3	3	4		Dés	1	2	3	4	5	6		
3	1	0	1	1	2	2	3		1	0	1	2	3	4	5		
4	3	2	1	1	0	0	1		2	1	0	1	2	3	4		
5	4	3	2	2	1	1	0		3	2	1	0	1	2	3		
6	5	4	3	3	2	2	1		4	3	2	1	0	1	2		
7	6	5	4	4	3	3	2		5	4	3	2	1	0	1		
8	8	7	6	6	5	5	4		6	5	4	3	2	1	0		
9																	
10	Effectifs								Effectifs								
11	0	4							0	6							
12	1	8							1	10							
13	2	8							2	8							
14	3	6							3	6							
15	4	4							4	4							
16	5	3							5	2							
17	6	2								36							
18	7	1															
19		36															
20																	

Équation du second degré

La résolution d'équation du second degré peut-être vue d'un axe différent de l'accoutumée.

Au lieu de travailler directement sur les équations de type :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Nous allons nous intéresser ici à la résolution d'équations de type :

$$\boldsymbol{f(x) = 0}$$

avec **f** une fonction polynomiale du second degré.

L'impact pédagogique est différent car, il est possible de demander la résolution de l'équation sans avoir la forme réduite sous-entendue précédemment.

Une analyse directe via le mode CAS

Utilisons le mode CAS de la calculatrice pour retrouver la forme réduite et faire apparaître les solutions recherchées

Questionnement 1

Une vision géométrique

Le fait d'avoir une fonction permet d'envisager directement une lecture graphique et d'obtenir la (ou les) solution(s) recherchée(s).

Questionnement 2

Une vision via un algorithme

Peut-on envisager un algorithme différent pour résoudre une équation du second degré qui ne demande pas les coefficients du polynôme mais directement le polynôme en question ?

Questionnement 3

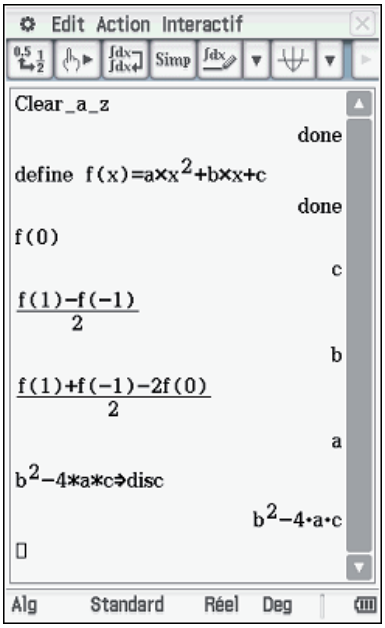
Résolution via le mode CAS, questionnement 1

Ou comment retrouver les coefficients d'un polynôme non réduit ?

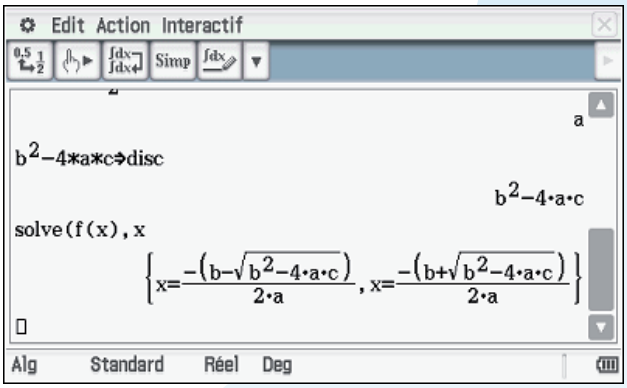
Dans un exemple classique pour résoudre l'équation du second degré suivante :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Où a, b et c sont des nombres donnés. Il suffit de commencer un algorithme de la sorte :



Capture 1.1



Capture 1.2

Capture 1.1 : Définissons la fonction adéquate directement. Il est possible de se convaincre d'un choix stratégique pour le calcul des coefficients a,b,c se ramenant à une équation du second degré classique du type :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

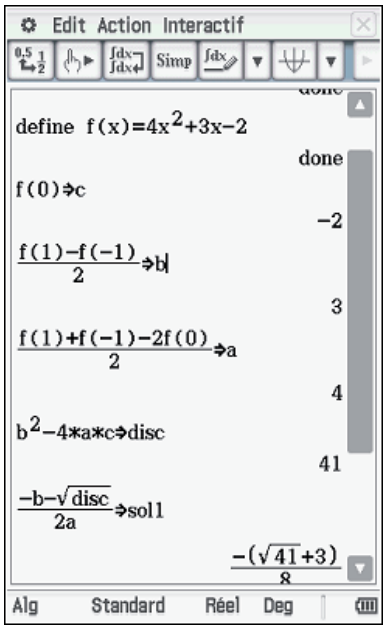
Capture 1.2 : dans le mode *CAS*, le pivotement de la fenêtre est possible pour obtenir une meilleure visibilité des réponses et des calculs en cours.

Si f(x) est de la forme d'un polynôme du second degré la recherche des coefficients pour sa forme réduite est donnée par :

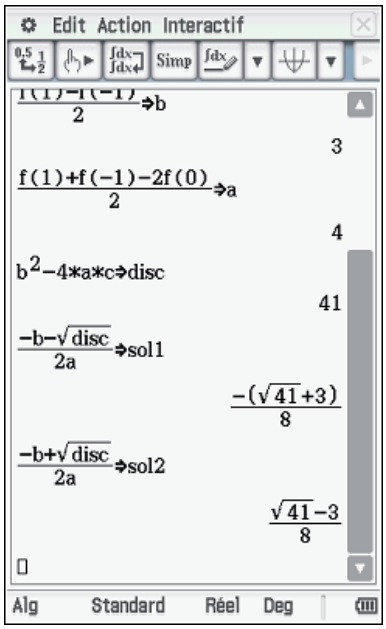
$$c = f(0)$$
$$b = \frac{f(1) - f(-1)}{2}$$
$$a = \frac{f(1) + f(-1) + 2f(0)}{2}$$

Exemple 1 : cas réduit

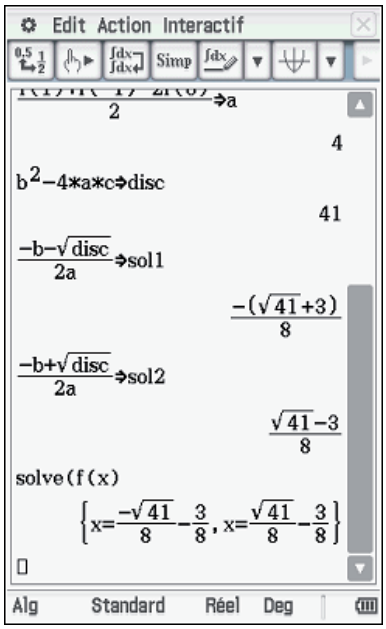
Résoudre $f((x) = 0$ sachant que $f(x) = 4x^2 + 3x - 2$



Capture 1.3



Capture 1.4



Capture 1.5

Pour résoudre une équation du second degré en gardant l'esprit de la fonction, il suffit de la définir puis, d'incrémenter les coefficients et de faire calculer les solutions.

Capture 1.3 : définissons à nouveau f(x). Les calculs permettent de retrouver ses coefficients pour sa forme réduite ainsi que son *discriminant*.

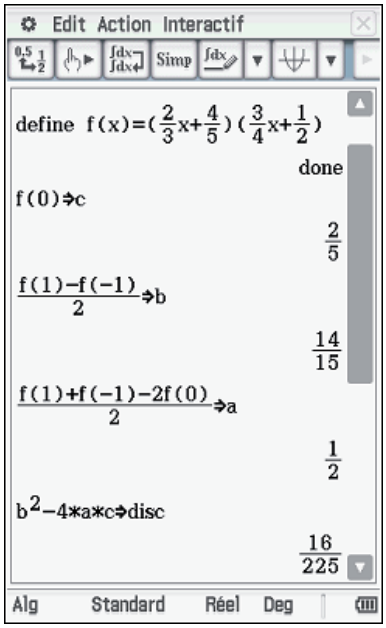
Capture 1.4 : les deux solutions apparaîssent.

Capture 1.5 : attention, la fonction *solve()* de la calculatrice donne directement la réponse. La démarche recherchée ici est d'obtenir le calcul du discriminant et, le détail des solutions.

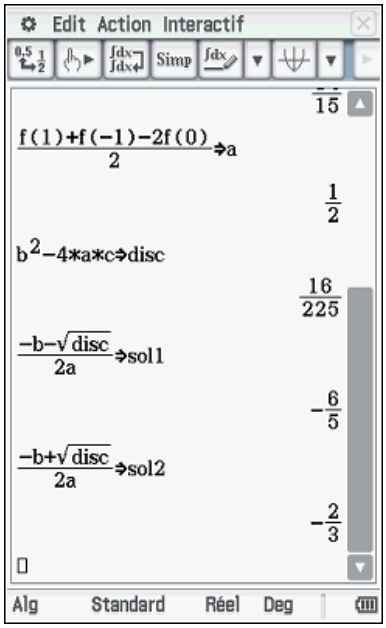
Exemple 2 : Cas non réduit d'une équation produit

Résoudre $f((x) = 0$ sachant que :

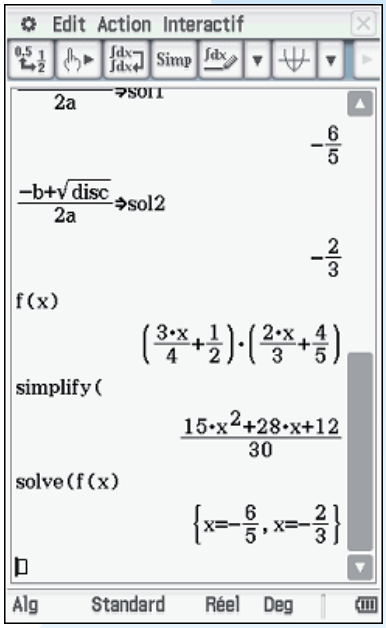
$$f(x) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right)$$



Capture 1.6



Capture 1.7



Capture 1.8

Capture 1.6 : à nouveau, il est aisé de remplacer dans l'historique du calcul précédent, la définition de la fonction f.

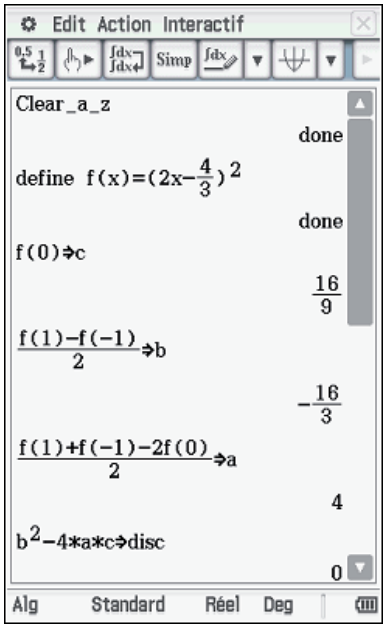
Capture 1.7 : nous retrouvons deux solutions distinctes qui nous rappellent pourquoi une équation produit est liée à une équation du second degré.

Capture 1.8 : on retrouve les réponses proposées via le calcul du discriminant et la formule réduite du polynôme. La fonction *solve()* nous confirme ces résultats.

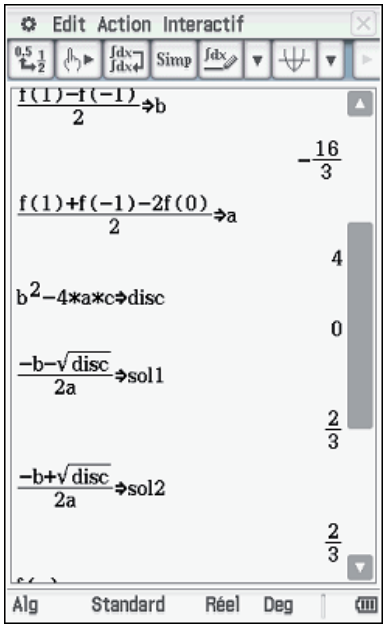
Exemple 3 : Cas d'une équation n'ayant qu'une solution

Résoudre $f((x) = 0$ sachant que :

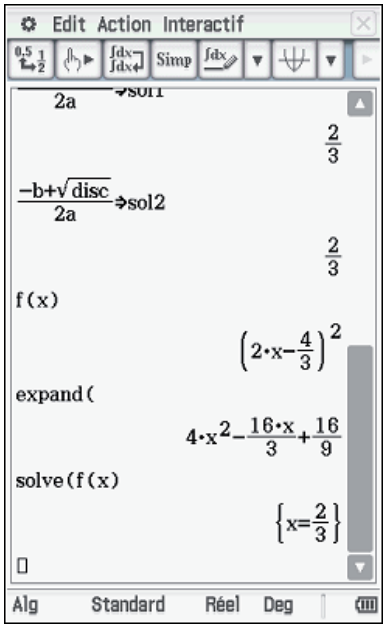
$$f(x) = \left(2x - \frac{4}{3}\right)^2$$



Capture 1.9



Capture 1.10



Capture 1.11

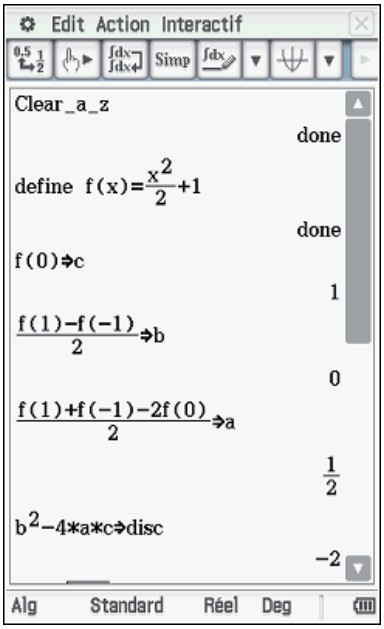
Capture 1.9 : la barre de défilement à droite de l'écran permet de reprendre le calcul au début.

Capture 1.11 : pour un discriminant nul, les deux solutions sont égales. La fonction *solve()* n'affiche forcement qu'une solution du coup.

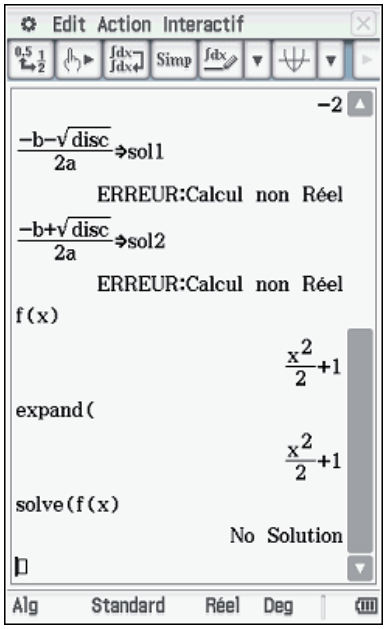
Exemple 4 : Cas sans solution réelles

Résoudre $f((x) = 0$ sachant que :

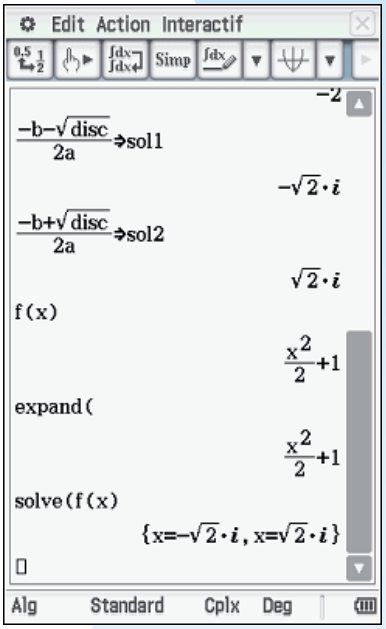
$$f(x) = \frac{x^2}{2} + 1$$



Capture 1.12



Capture 1.13



Capture 1.14

Capture 1.12 : ici, on trouve un discriminant négatif (-2).

Capture 1.13 : en mode *REEL*, il n'y aura pas de solutions car, le discriminant est négatif. Un message d'erreur apparait dans le déroulement des calculs.

Capture 1.14 : par contre, en mode *CPLX*, la résolution reste possible.

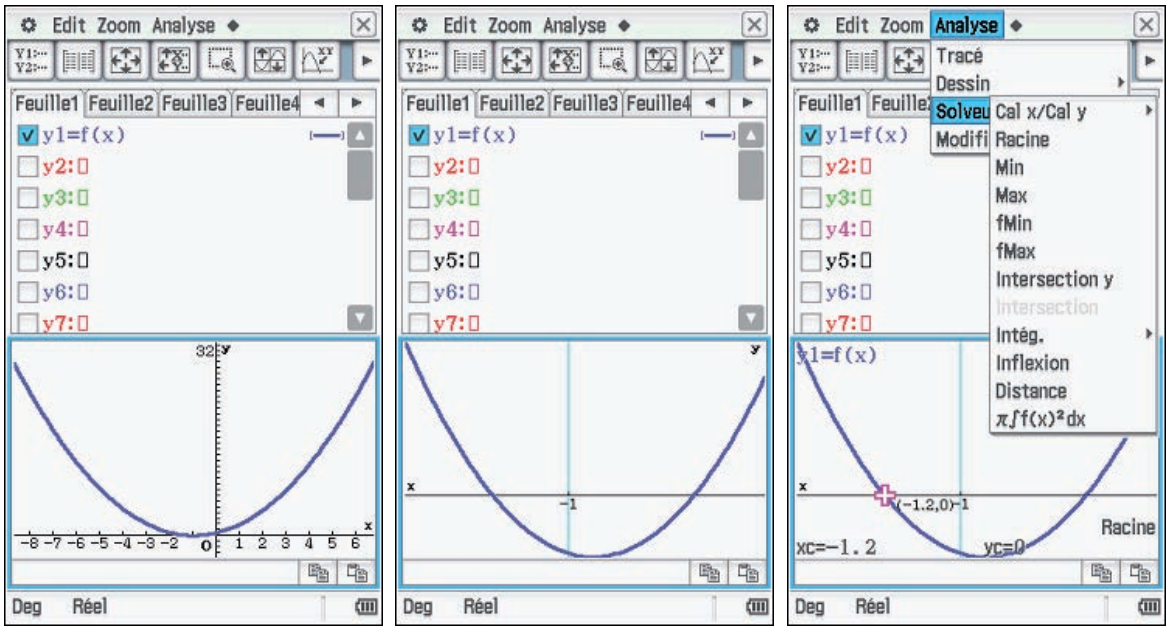
Résolution graphique, questionnement 2

Ou comment lire directement les réponses sur une représentation graphique ?

Reprenons l'un des cas précédent pour visualiser la représentation graphique ainsi que les racines adéquates.

Cas de l'équation produit :

$$f(x) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right)$$



Capture 2.1 Capture 2.2 Capture 2.3

Capture 2.1 : le fait d'avoir défini la fonction dans le mode *Principale* de la calculatrice permet de pouvoir directement utiliser f(x) pour dessiner sa représentation.

Capture 2.2 : un zoom automatique de la courbe permet de la visualiser dans la partie qui nous intéresse.

Capture 2.3 : une analyse de différents critères de sa représentation graphique est offerte. Cette analyse permet entre autre de trouver graphiquement les solutions de l'équation f(x) =0 .

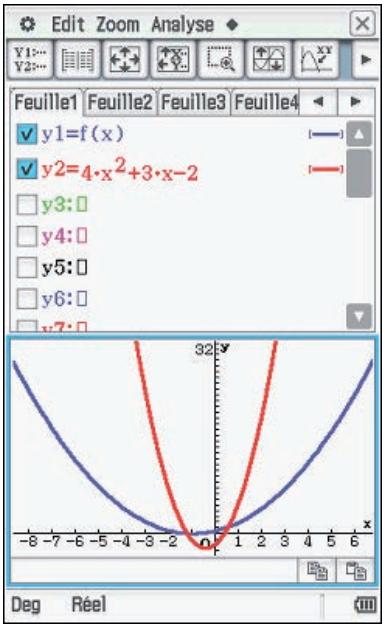
Ainsi, on obtient par lecture graphique les solutions voulues.

Il reste à noter que le discriminant n'est pas trouvé ici.

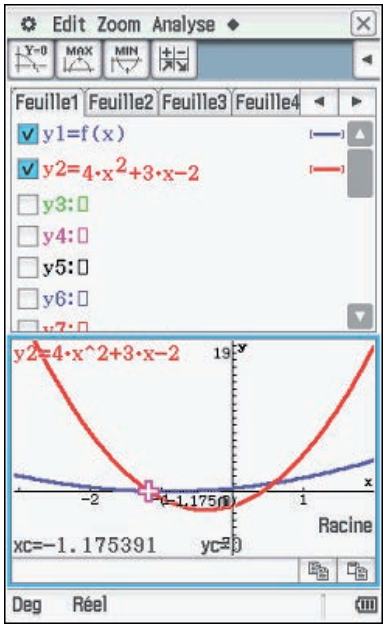
Cas étudiés précédemment :

Nous avons la possibilité de faire afficher plusieurs courbes sur le même graphique.
Donc, visuellement, il est possible de retrouver les cas intéressants.

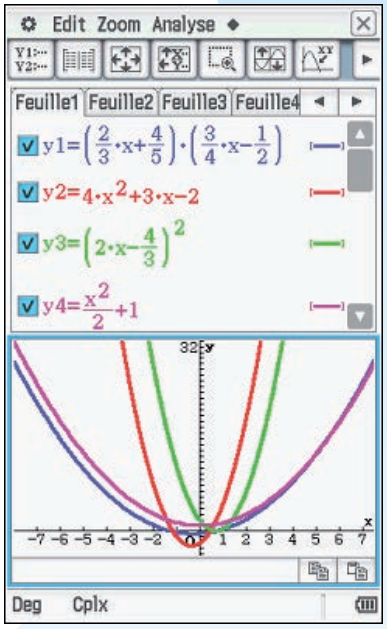
Si b^2-4ac est positif, on aura deux solutions.
Si b^2-4ac =0 , une seule
Sinon aucune.



Capture 2.4



Capture 2.5



Capture 2.6

On retrouve que le dernier cas ne coupe pas l'axe des abscisses donc, n'aura pas de solutions.
Le lien avec le discriminant n'est pas visible directement dans cette méthode de résolution, un travail antérieur reste essentiel.

Résolution Algorithmique, questionnement 3

Utilisation du mode CAS pour détourner un algorithme

Dans un exemple classique pour résoudre l'équation du second degré suivante :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où a, b et c sont des nombres donnés.

Il suffit de commencer un algorithme de la sorte :

Demander a,b,c

delta = b^2 – 4*a*c

Ecrire Delta

(…)

Mais, que se passerait-il si au lieu de faire demander les coefficients, on travaillait directement avec un polynôme réduit ou non du second degré ?

La recherche des coefficients du polynôme réduit serait un premier travail et permettrait de résoudre des équations élargies du style :

$$(2x + 4)(3x + 5) = 0$$

Ainsi, si $f(x)$ est notre fonction polynômiale du second degré, on a :

$$f(x)\ est\ de\ la\ forme\ ax^2 + bx + c$$

Avec :

$$f(0) = c$$

$$\frac{f(1) - f(-1)}{2} = \frac{(a + b + c) - (a - b + c)}{2}$$
$$= \frac{2b}{2}$$
$$= b$$

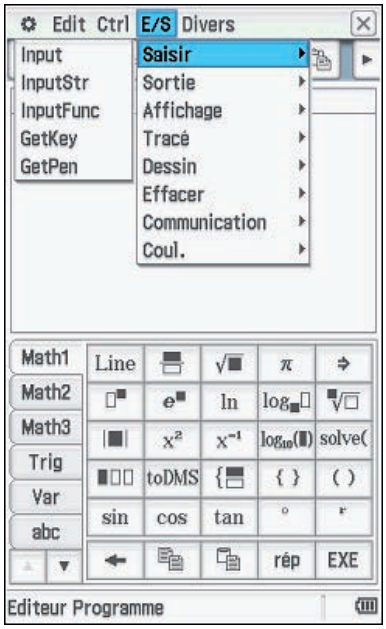
$$\frac{f(1) + f(-1) - 2f(0)}{2} = \frac{(a + b + c) + (a - b + c) - 2c}{2}$$
$$= \frac{2a}{2}$$
$$= a$$

Un algorithme de base pour résoudre une équation du second degré est donné par :

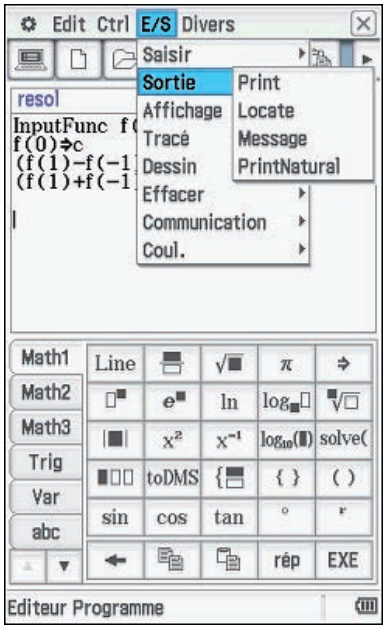
```
Demander      POLYNOME f(x)

# Recherche des coefficients
c       =     f(0)
b       =     (f(1)-f(-1) ) /2
a       =     (f(1)+f(-1)-2f(0))/2

# Vérifions si la fonction est un polynôme du second degré
dif=f(x)-(a*x^2+b*x+c)

Si      dif = 0

        delta = b^2 – 4*a*c
        Ecrire « Discriminant »
        Ecrire Delta

        Si      delta >0
                Ecrire « Deux solutions »
                Ecrire « Sol1 : »
                Ecrire (–b-racine(delta)))/(2a)
                Ecrire « Sol2 : »
                Ecrire (–b+racine(delta)))/(2a)

        Sinon   Si      delta = 0
                        Ecrire « Une solution : »
                        Ecrire (–b)/(2a)
                Sinon
                        Ecrire    « Pas de solutions réelles »

        Fin de condition

Sinon
        Ecrire « cette fonction n’est pas un polynôme du second degré »

Fin de condition
```

Programmation proprement dite :

Capture 3.1



Capture 3.2



Capture 3.3

Capture 3.1 : allons dans le mode *Programme* de la calculatrice.

Capture 3.2 : il est possible de saisir en entrée une fonction via la commande *InputFunc*.

Capture 3.3 : la commande de sortie, Print affichera les valeurs trouvées à savoir les coefficients réduits ainsi que le discriminant et les solutions si elles existent.

```
InputFunc f(x)
f(0)⇒c
(f(1)-f(-1))/2⇒b
(f(1)+f(-1)-2*f(0))/2⇒a
ClrText

Print f(x)
Print "Les coefficients réduits sont pour ax^2+bx+c=0"
Print "a="
Print a
Print "b="
Print b
Print "c="
Print c

Print "Le discriminant est :"
b^2-4*a*c⇒disc
print disc

If (disc<0)
Then
Print "Pas de solutions réelles"
ElseIf (disc=0)
Then
Print "Une seule solution :"
-b/(2a)⇒sol
print sol
Else
Print "Deux solutions :"
(-b-√(disc))/(2a)⇒sol1
(-b+√(disc))/(2a)⇒sol2
print sol1
print sol2
IfEnd
```

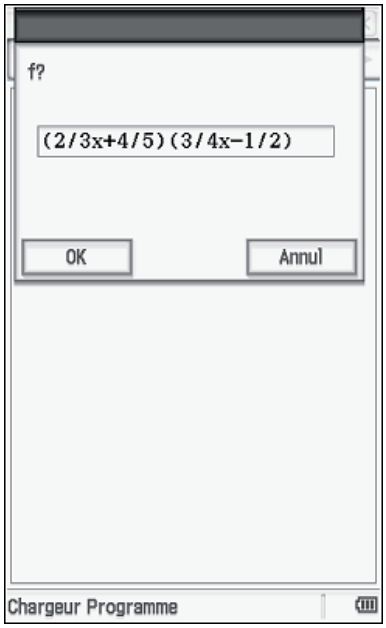
Capture 3.4

Capture 3.4 : voici le programme rentré dans la calculatrice. Pour ne pas l'alourdir, il n'a pas été proposé avec une mise en forme des résultats trouvés . Les réponses seront données ligne par ligne.

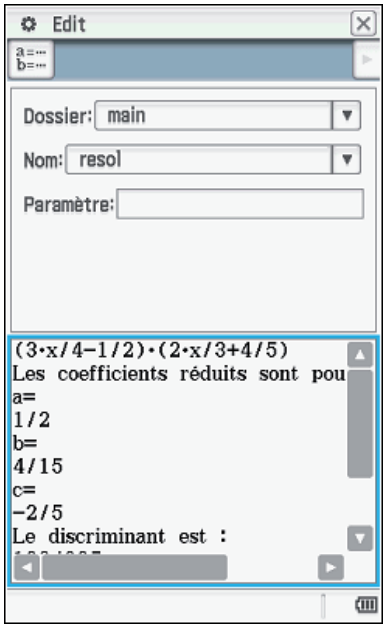
Deux exemples pour valider la programmation

Le cas du développement produit vu au questionnement 1 :

$$f(x) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right)$$



Capture 3.5



Capture 3.6

Capture 3.7

Capture 3.5 : rentrons la fonction définissant une équation produit dans cet exemple.

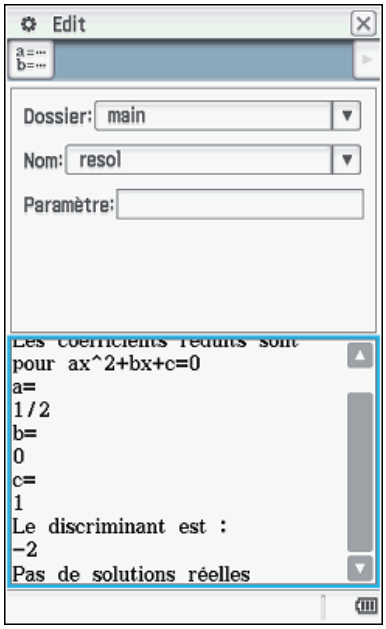
Capture 3.6 : nous retrouvons les coefficients utiles à une résolution d'équation du second degré.

Capture 3.7 : le discriminant est positif, il y a bien deux solutions possibles.

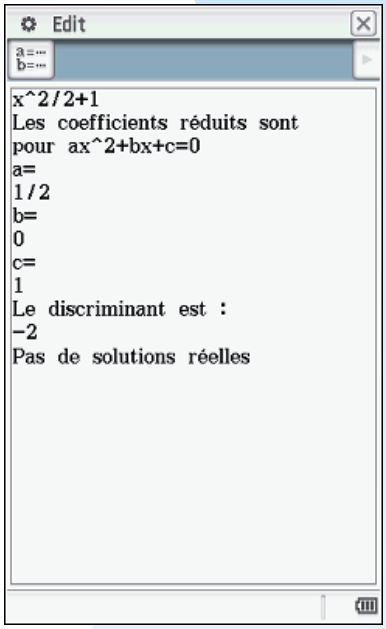
Un cas sans solution réelle:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + 1$$

Capture 3.8



Capture 3.9



Capture 3.10

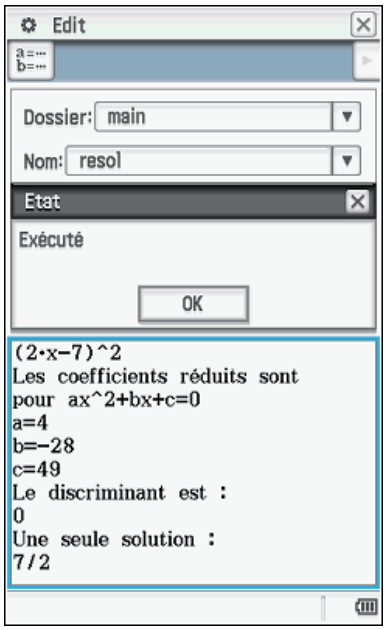
Capture 3.10 : la fonction swap de la calculatrice permet de voir en entier une partie de l'écran pour avoir directement les solutions sorties par le programme de résolution.

Une amélioration technique

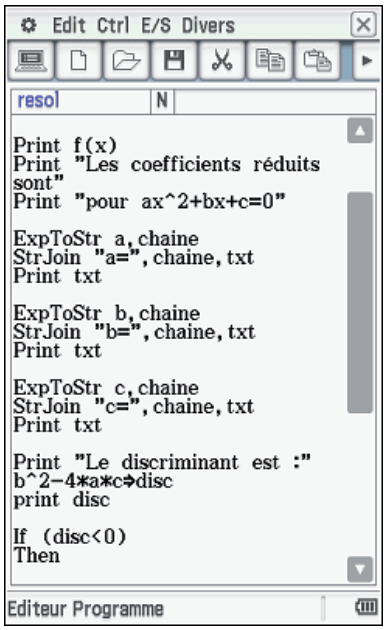
Le programme précédent a l'avantage d'être linéaire. Les nombres en sortie sont facilement visibles et la fonction *Print* permet d'afficher ou un résultat ou un texte.

Mais, comment faire affficher en sortie sur la même ligne, un texte et une variable ?

Capture 3.11



Capture 3.12



Capture 3.13

Capture 3.11 : utilisons le cas d'une fonction aboutissant à une seule solution.

Capture 3.12 : on découvre qu'ici, les coefficients a,b et c sont directement écrits avec la valeur recherchée, le tout sur la même ligne.

Capture 3.13 : une astuce est nécessaire :

ExpToStr : transforme la variable en une chaîne de caractères.
StrJoin : ajoute deux chaînes de caractères dans une troisième

Il ne reste qu'à faire afficher la chaîne constituée.

Notes personnelles

Le plant de Maïs

D'après le sujet de BAC S, 2013 de Pondichéry

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps.
La hauteur est en mètres .Après modélisation, on obtient la fonction logistique suivante :

$$h(t) = \frac{a}{1 + be^{-0.04t}}$$

avec a et b des constantes réelles et positives et, t la variable représentant le temps en jours.

On sait qu'initialement, pour t=0, le plant mesure 0,1 m. Et, que sa hauteur tend vers une limite de 2m. Déterminer les constantes a et b afin que la croissance d'un plant de maïs corresponde au modèle étudié.

Questionnement 1

On considère maintenant que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction h définie sur [0,250] par :

$$h(t) = \frac{2}{1 + 19e^{-0.04t}}$$

Question 1

Déterminer h'(t) en fonction de t

En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle [0,250]

Question2

Calculer le temps nécessaire pour que le plant de maïs mesure au moins 1,5 m.

Question 3

1) Vérifier que :

$$h(t) = \frac{2e^{0.04t}}{e^{0.04t} + 19}$$

pour t appartenant à l'intervalle $[0\,;250]$

2) Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle [0,250] par :

$$F(t) = 50ln(e^{0.04t} + 19)$$

est une primitive de la fonction h.

3) Déterminer la valeur moyenne de h sur l'intervalle [50,100]

En déduire une valeur approchée au centième et interpréter ce résultat.

Question 4

On s'intéresse à la vitesse de croissance du plant de maïs ; elle est donnée par la fonction dérivée de h.

La vitesse de croissance est maximale pour une valeur de t. En utilisant la représentation graphique de h, donner une valeur approchée de celle-ci puis, estimer la hauteur du plant.

Questionnement 2

Le plant de Mais, questionnement 1

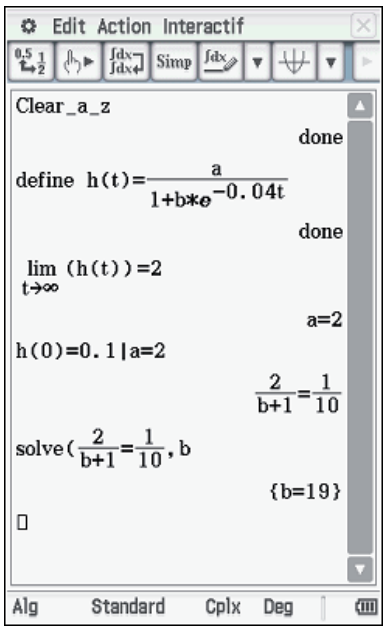
Résolution CAS dans le mode Principal

Déterminer les constantes a et b afin que la croissance d'un plant de maïs corresponde au modèle étudié sachant que :

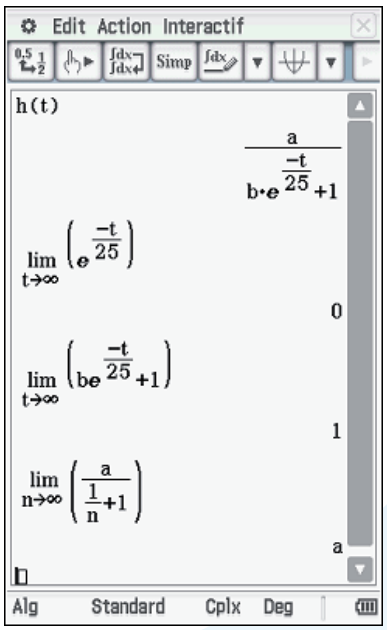
$$\lim_{t\to\infty} \frac{a}{1+be^{-0.04t}} = 2$$

Et,

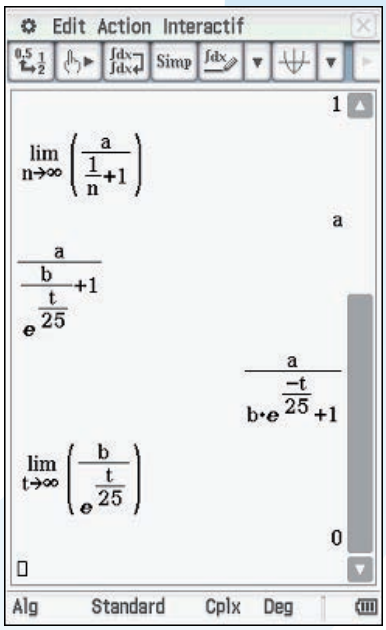
$$h(0) = \frac{1}{10}$$



Capture 1a.1



Capture 1a.2



Capture 1a.3

Capture 1a.1 : dans le mode *principal* de la calculatrice, définissons la fonction h par :

$$h(t) = \frac{a}{1+be^{-0.04t}}$$

Il suffit de donner la limite en l'infini pour que la calculatrice nous retourne la valeur de a.

$$\boldsymbol{a = 2}$$

L'écriture de $h(0) = 0.1$ sachant que a=2 permet d'obtenir une égalité :

$$\frac{2}{b+1} = \frac{1}{10}$$

Que nous pouvons résoudre directement avec la fonction *solve()* pour obtenir :

$$\boldsymbol{b = 19}$$

Capture 1a.2: Il est possible de faire calculer les limites directement en fonction de plusieurs paramètres. Ainsi, on retrouve un descriptif de la démonstration de rédaction attendue dans ce questionnement.

Le plant de Mais, questionnement 2

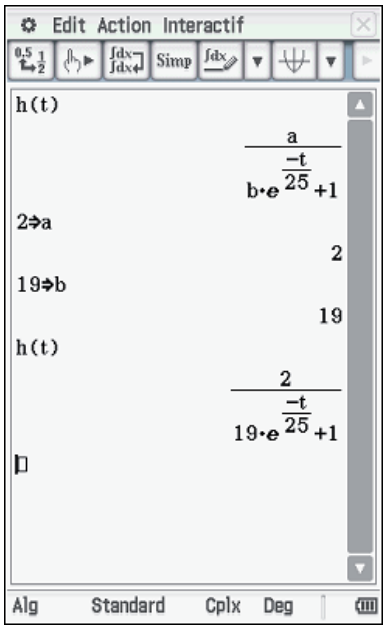
Résolution CAS dans le mode Principal

Question 1 : On a maintenant :

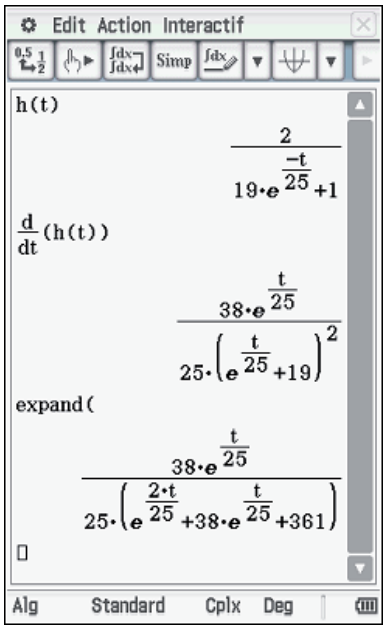
$$h(t) = \frac{2}{1 + 19e^{-0.04t}}$$

où nous retrouvons logiquement les paramètres a et b résolus précédemment.

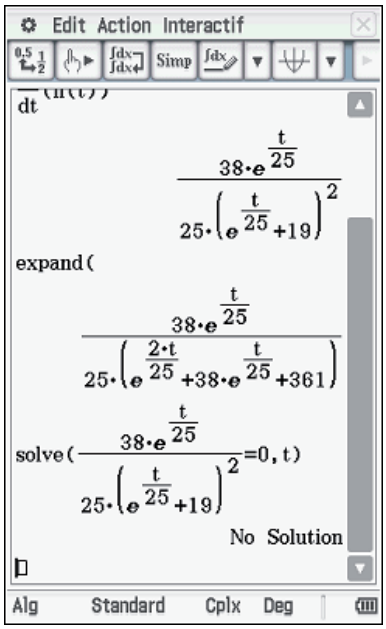
Déterminer h'(t) en fonction de t.
En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle [0,250].



Capture 1b.1



Capture 1b.2



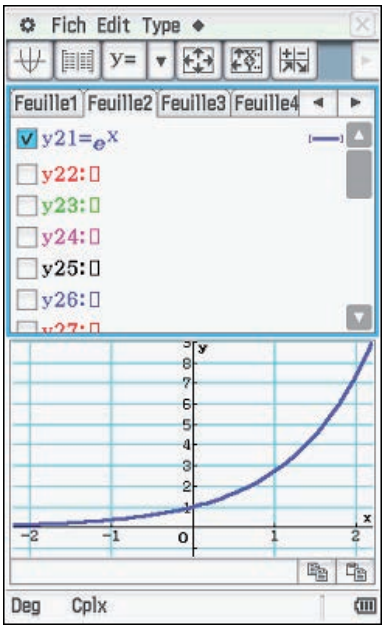
Capture 1b.3

Capture 1b.1 : il suffit de définir les paramètres a et b, et d'afficher $h(t)$ pour retrouver la fonction à étudier.

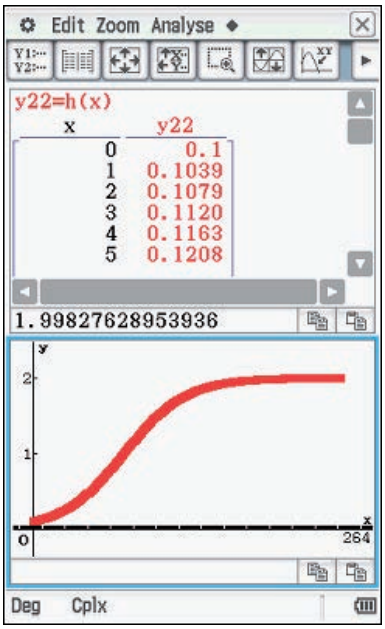
Capture 1b.2 : La dérivée est donnée directement. Un simple coup d'œil permet de confirmer qu'elle sera positive quelle que soit la valeur de t.

$$h'(t) = \frac{38e^{\frac{t}{25}}}{25\left(e^{\frac{t}{25}} + 19\right)^2}$$

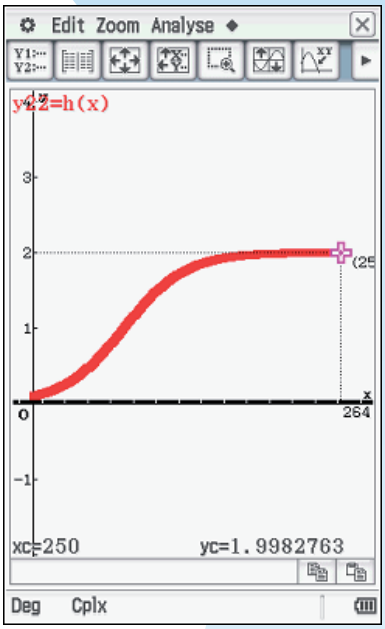
Capture 1b.3 : Cette dérivée h' ne s'annule pour aucune valeur. La fonction h est donc croissante sur l'intervalle étudié.



Capture 1b.4



Capture 1b.5



Capture 1b.6

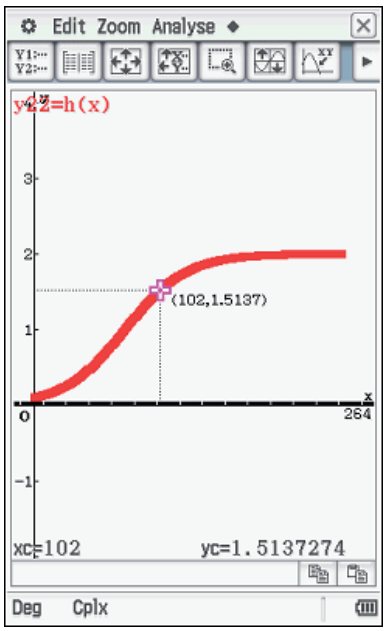
Capture 1b.4 : la fonction e^x est une fonction croissante et positive. Du coup, nous obtenons une *piste* pour démontrer les réponses directement trouvées avec le mode CAS de la calculatrice.

Capture 1b.5 : comme h(x) est définie et que les paramètres a et b sont donnés, il est facile de faire afficher sa représentation graphique. Notons que son tableau de valeur permet de confirmer le fait qu'à l'origine, on retrouve les 10 cm du plant de départ.

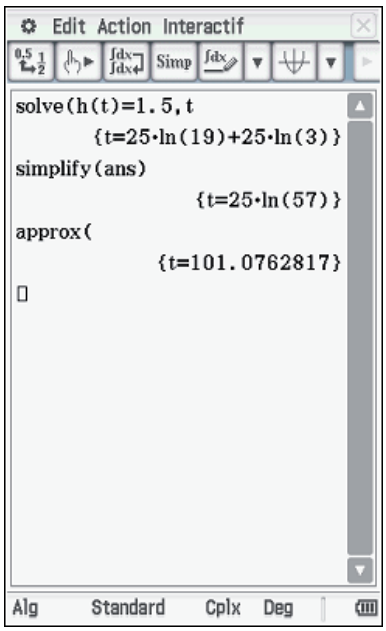
Capture 1b.6 : pour le 250^{e} jour, le plant de maïs a une hauteur proche des 2m attendus.

Question 2 :

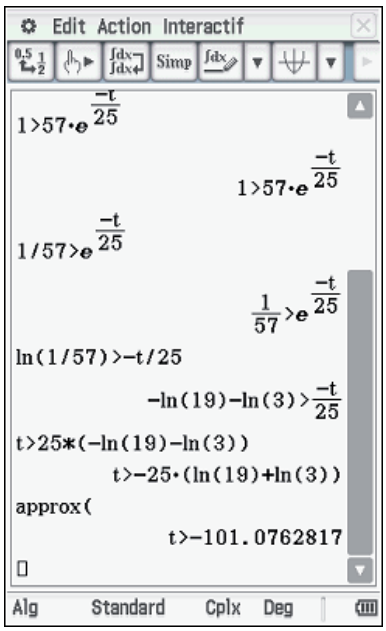
Calculer le temps nécessaire pour que le plant de maïs fasse au moins 1,5 m.



Capture 2.4



Capture 2.5



Capture 2.6

Capture 2.4 : par lecture graphique : on trouve 102 jours.

Capture 2.5 : par résolution directe en utilisant la fonction *solve()*, on trouve une valeur qui dépasse légèrement les 101 jours soit 102 jours pour un travail sur des jours entiers passés.

Capture 2.6 : une *piste* abordable pour une résolution d'inéquation est possible.

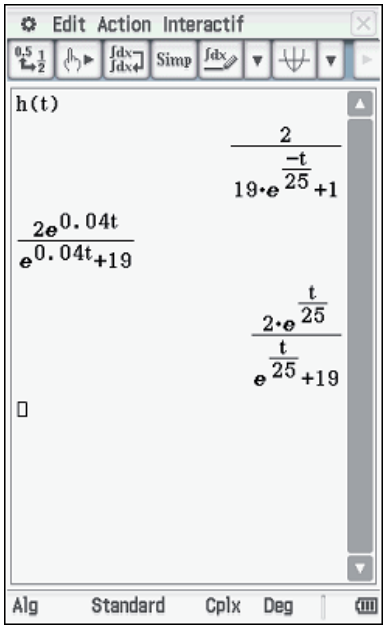
Au bout de 102 jours, les plants de maïs mesurent au moins 1,5 m

Question 3

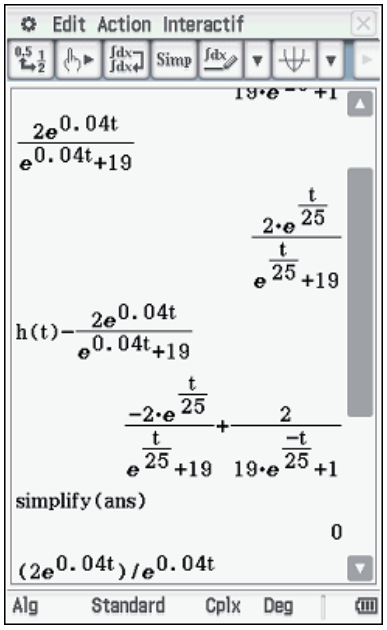
1) Vérifier que :

$$h(t) = \frac{2e^{0.04t}}{e^{0.04t} + 19}$$

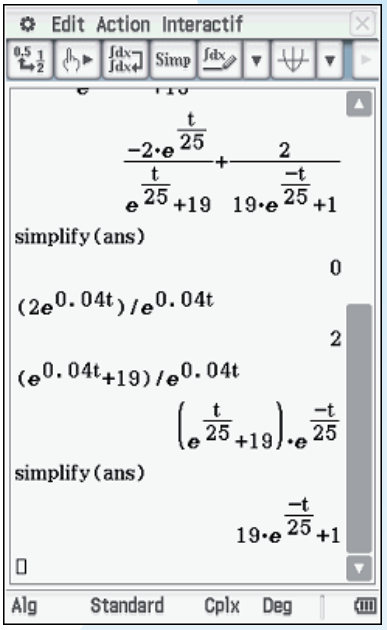
pour t appartenant à l'intervalle $[0\,;250]$.



Capture 3.1



Capture 3.2



Capture 3.3

Captue 3.1: lorsque l'on regarde l'expression recherchée ainsi que la fonction $h(t)$, il semble utile de travailler sur des fractions égales en multipliant numérateur et dénominateur par :

$$e^{\frac{t}{25}}$$

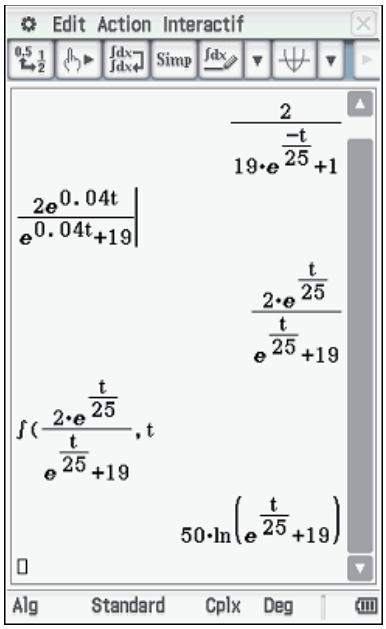
Captue 3.2: la différence entre h(t) et l'expression donnée aboutit à zéro. Il y a bien l'égalité recherchée.

Captue 3.3: on retrouve la *piste* envisagée dans cette première capture d'écran.

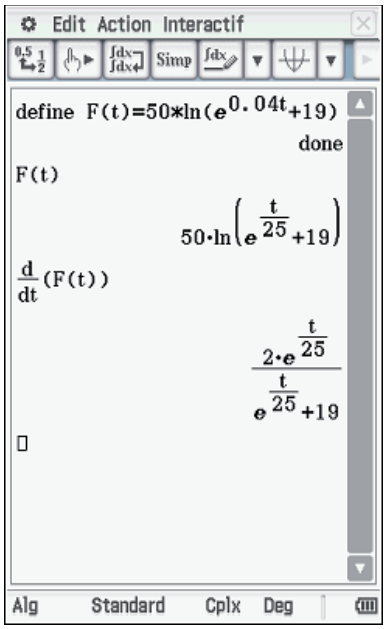
2) Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle [0,250] par :

$$F(t) = 50ln(e^{0.04t} + 19)$$

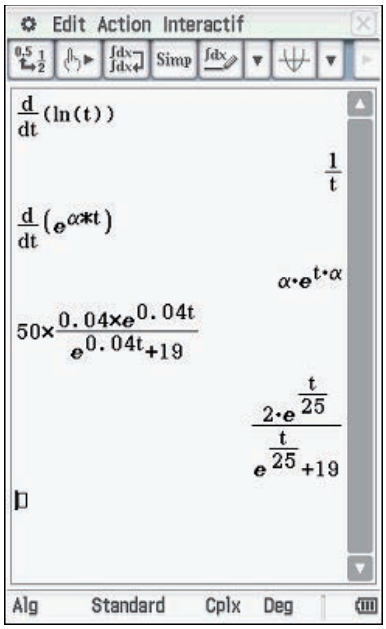
est une primitive de la fonction h.



Capture 3.4



Capture 3.5



Capture 3.6

Captue 3.1: faisons calculer directement l'intégrale de h(t) :

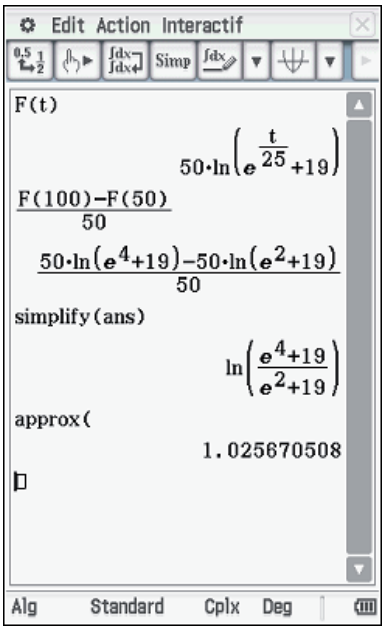
$$\int h(t)\,dt = 50ln(e^{0.04t} + 19)$$

Capture 3.2 : le travail attendu est un calcul de la dérivée de la fonction F que l'on aura bien-entendu vérifiée comme étant continue sur le domaine de définition. On retrouve bien :

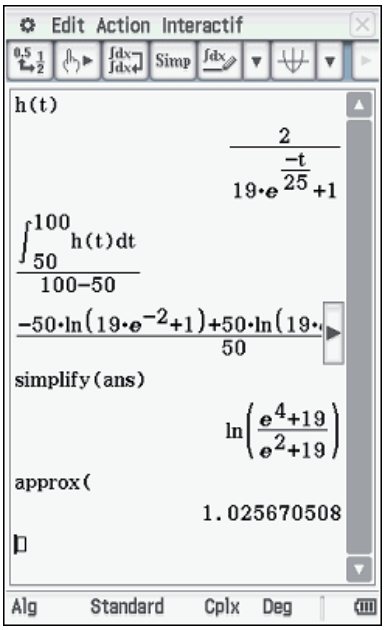
$$F'(t) = h(t)$$

Capture 3.3 : les dérivées des fonctions usuelles permettent d'aboutir à la résolution de la question.

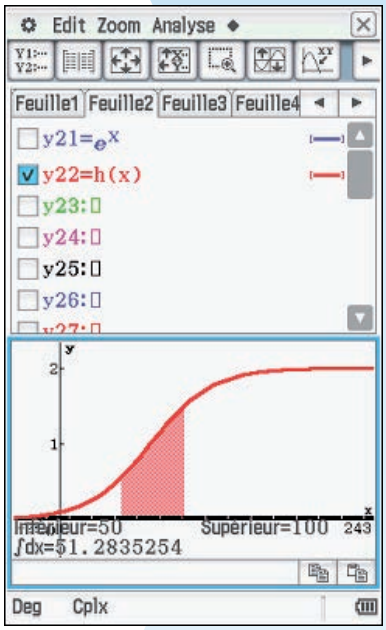
3) *Déterminer la valeur moyenne de h sur l'intervalle [50,100]*
En déduire une valeur approchée au centième et interpréter ce résultat.



Capture 3.7



Capture 3.8



Capture 3.9

Capture 3.7 : le calcul de la valeur moyenne est donnée par :

$$\frac{F(100)-F(50)}{100-50}$$

Capture 3.8 : on peut trouver la valeur exacte de ce calcul de moyenne via le calcul intégral de la calculatrice :

$$Valeur\ moy_{[50;100]} = \ln\left(\frac{e^4+19}{e^2+19}\right)$$

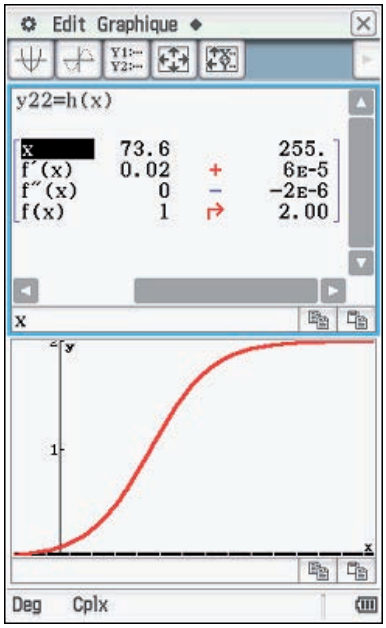
Capture 3.9 : un travail autour de l'aire sous la courbe permet d'aboutir aussi à la même réponse.

La valeur moyenne est de 1.03 m.

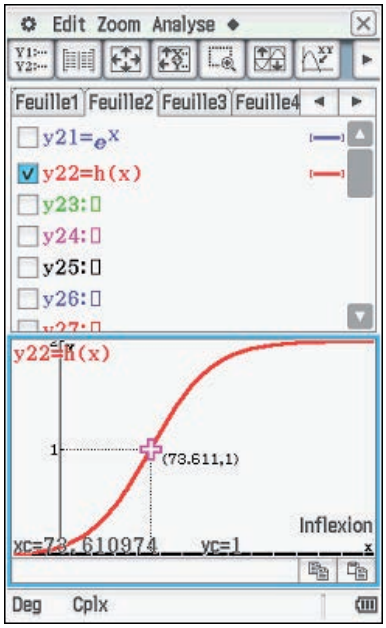
Question 4

On s'intéresse à la vitesse de croissance du plant de maïs ; elle est donnée par la fonction dérivée de h.

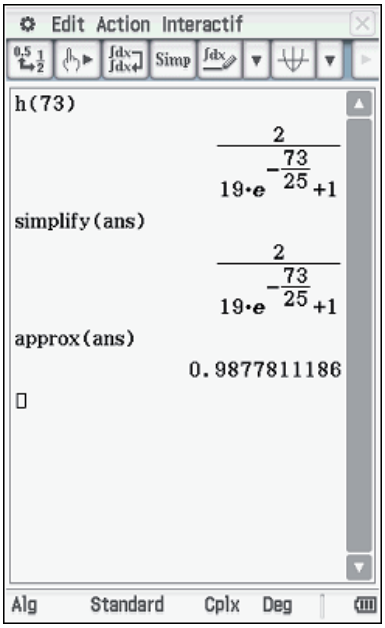
La vitesse de croissance est maximale pour une valeur de t. En utilisant la représentation graphique de h, donner une valeur approchée de celle-ci puis, estimer la hauteur du plant.



Capture 4.1



Capture 4.2



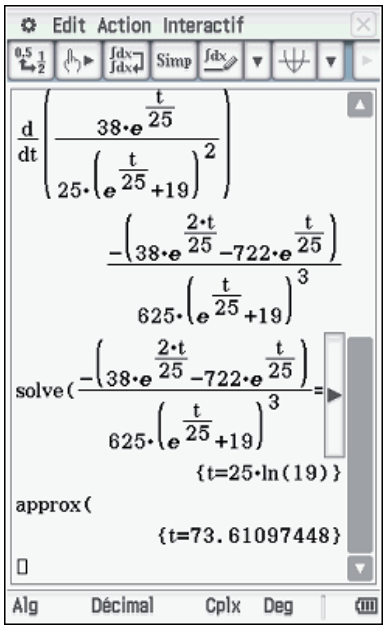
Capture 4.3

Capture 4.1: il est possible de faire représenter le tableau de variation de la courbe représentative de la fonction h(x). On y visualise le fait que la dérivée seconde s'annule pour une abscisse d'environ 73,6.

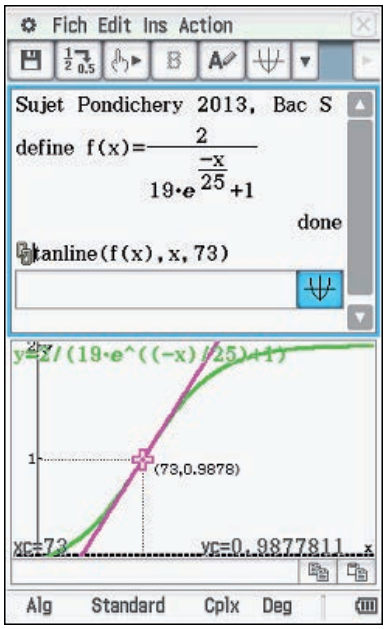
Capture 4.2 : la demande de la recherche des points *d'inflexion* de la courbe le confirme.

Capture 4.3 : un calcul direct permet de conclure.

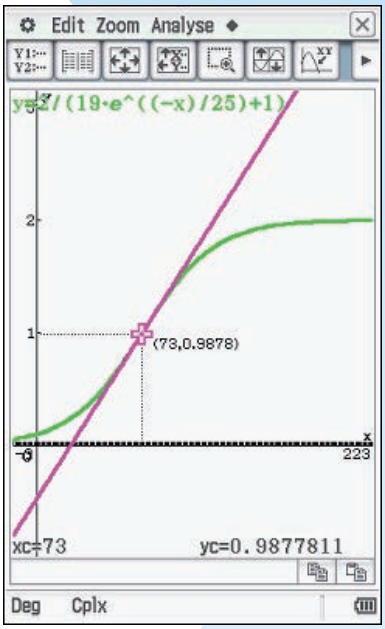
Environ 0.99 m pour le 73^{e} jour où la croissance semble maximale.



Capture 4.4



Capture 4.5



Capture 4.3

Capture 4.4 : la dérivée seconde permet de trouver ce point via le calcul. On trouve une valeur exacte qui confirme la valeur approchée précédente :

$$t = 25\ln(19)$$

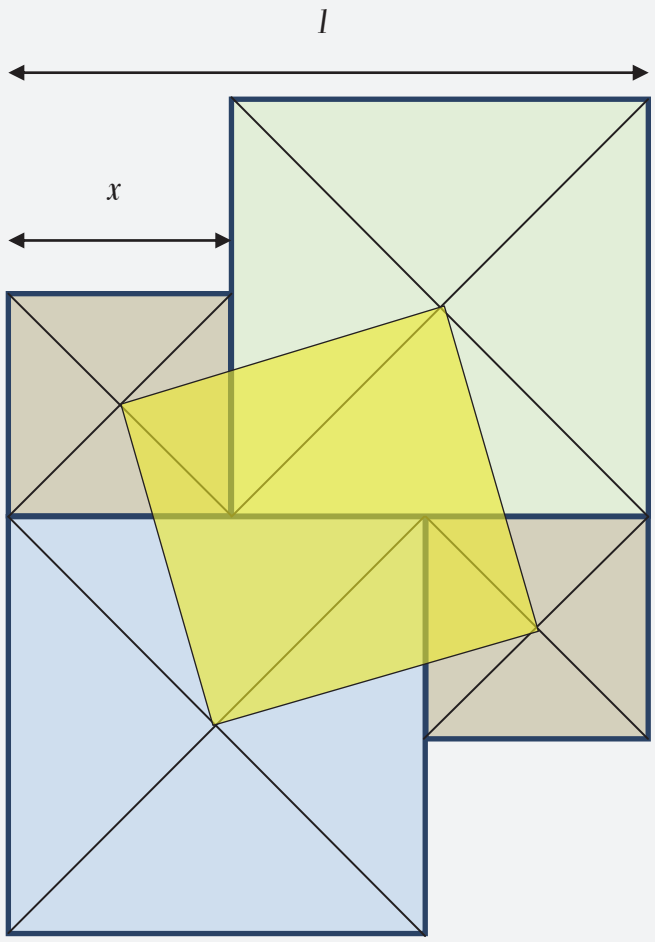
Capture 4.5 : le menu e-activity permet de gérer une progression dans la résolution d'un problème et d'y associer des lignes spécifiques : ici, par exemple : nous demandons la construction de la tangente à la courbe au point d'abscisse 73.

Capture 4.6 : on retrouve par agrandissement de la zone de l'écran, le fait que la courbe passe de *l'autre côté* de sa tangente.

Carré de Thébault

Un cas particulier

Souvent dans les problèmes de mathématiques nous avons des conditions particulières du type : « *soit un parallélogramme non aplati* ». Comme il est difficile de justifier ce type d'évidence alors, voici un questionnement permettant d'obtenir par la suite la rupture adéquate :

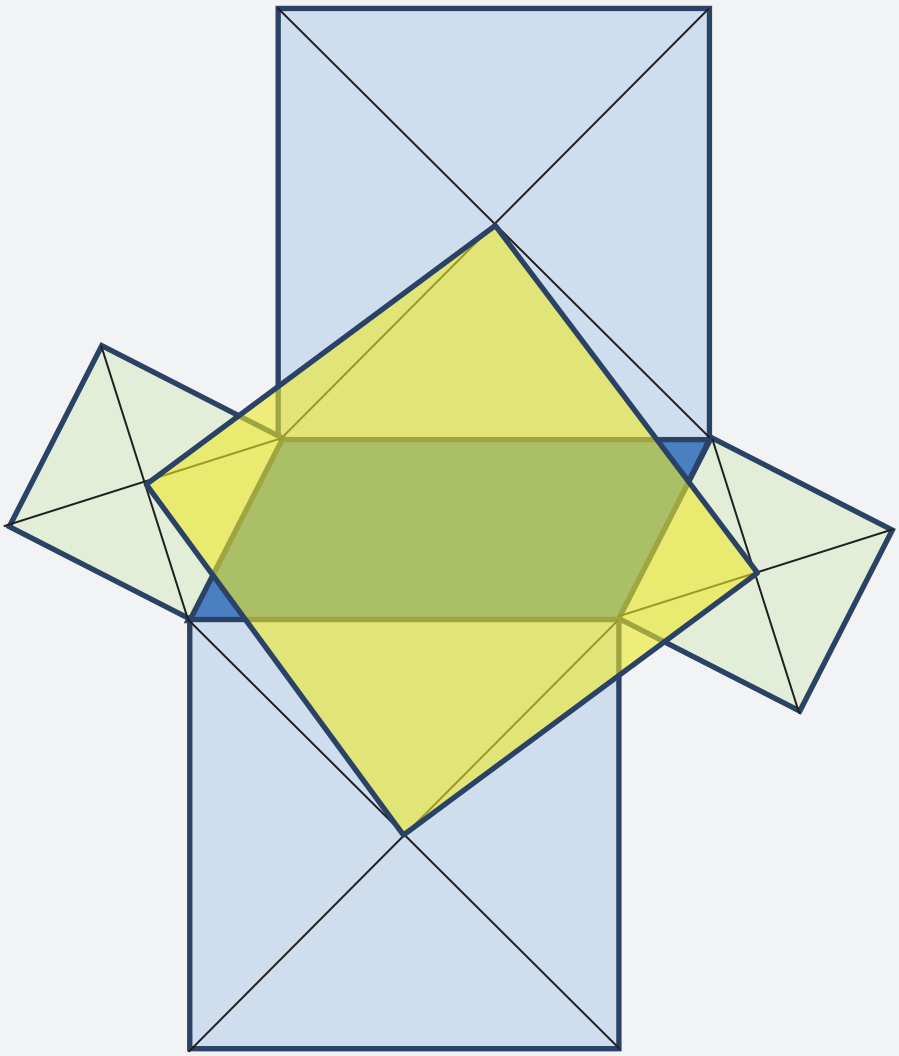


Soit quatre carrés positionnés de part et d'autre d'un segment unitaire tel que leurs dimensions sont les mêmes deux à deux.
Leur centre forme un quadrilatère.
Montrons que quelle que soit la longueur la longueur x comprise entre [0,1] , le quadrilatère représenté en jaune est bien un carré.
Et, retrouvons l'aire de celui-ci en fonction de la longueur *x.*

Questionnement 1

Théorème de Thébault

Le segment unitaire précédent n'est en fait qu'un parallélogramme aplati. Nous allons en déduire la configuration suivante :



Soit un parallélogramme quelconque. Si on construit les carrés extérieurs au côté du parallélogramme, on peut affirmer que leurs centres forment aussi un carré.
Démontrons ce théorème.

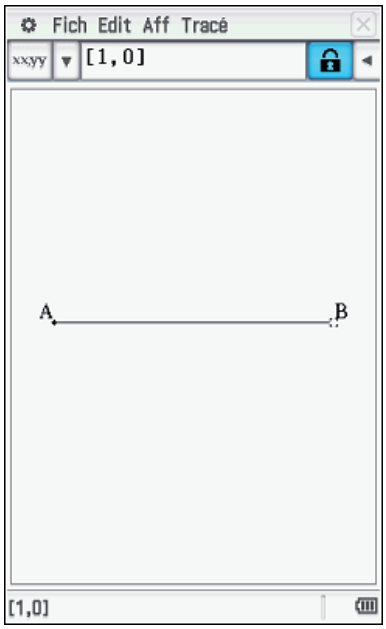
Questionnement 2

Un cas particulier, questionnement 1

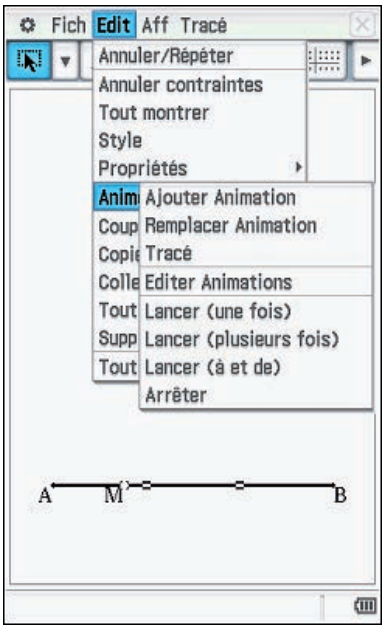
De la géométrie dynamique à l'analyse

Dans un premier temps, nous allons construire la figure pour avoir la possibilité de visualiser ce quadrilatère.

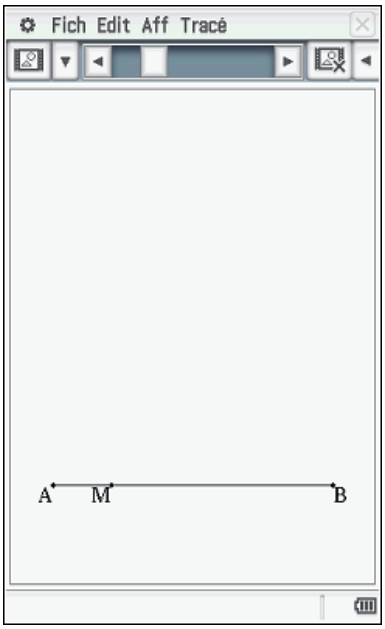
Mode dynamique et animation d'un point mobile



Capture 1.1



Capture 1.2

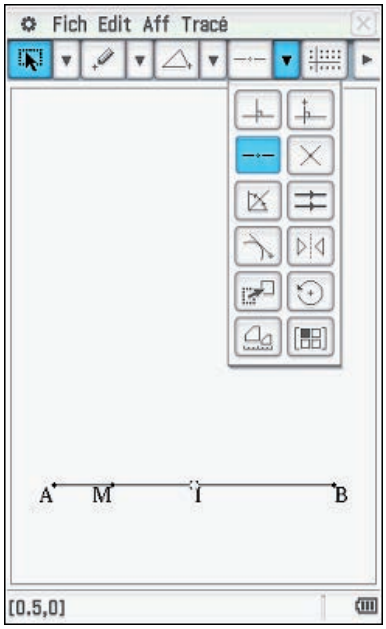


Capture 1.3

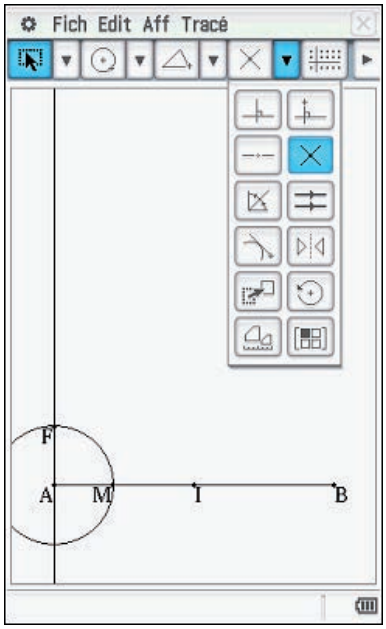
Capture 1.1 : la création du segment [AB] peut être définie de plusieurs façons. Nous choisissons ici d'imposer les coordonnées des points A et B.

Capture 1.2 : comme le point M est mobile sur le segment [AB] , nous définissons l'animation de ce point en cliquant sur *Remplacer Animation.*

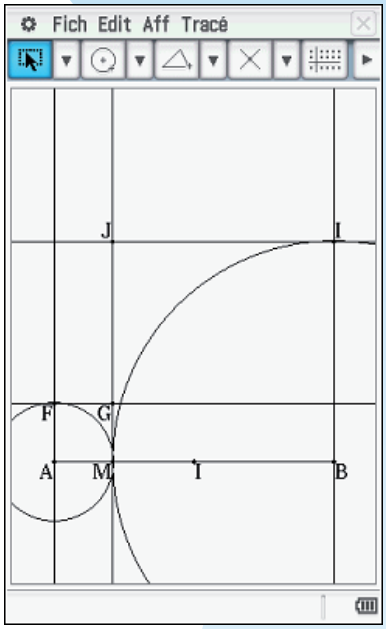
Capture 1.3 : dans le menu *Affichage*, il est possible de faire apparaître une barre de défilement qui déplacera le point M à notre guise sur le segment [AB] via l'onglet *Animation UI*



Capture 1.4



Capture 1.5

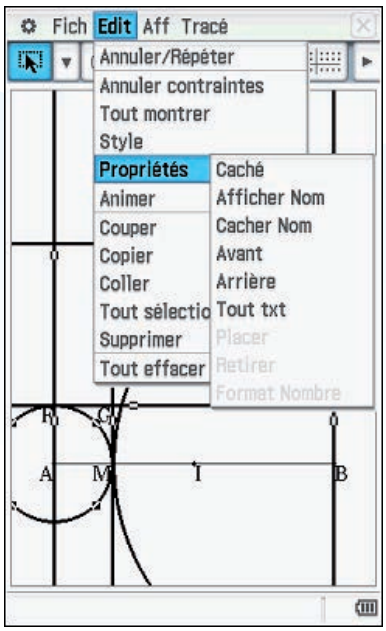


Capture 1.6

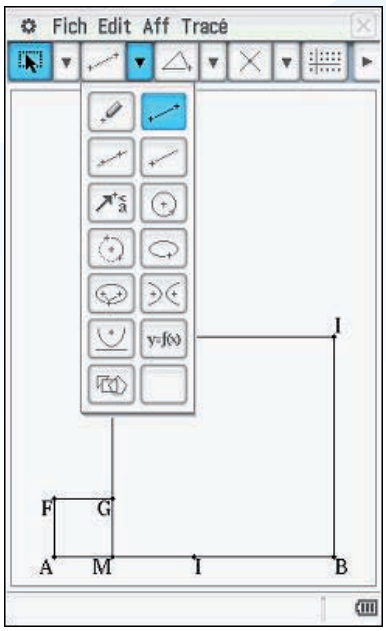
Capture 1.4 : une analyse préalable de la figure à construire permet de démontrer l'utilité d'un centre de symétrie. Nommons-le I. Il sera ainsi, aussi le milieu de [AB].

Capture 1.5 : dessinons le premier carré. Une perpendiculaire passant par A et un cercle de rayon AM sont nécessaires.

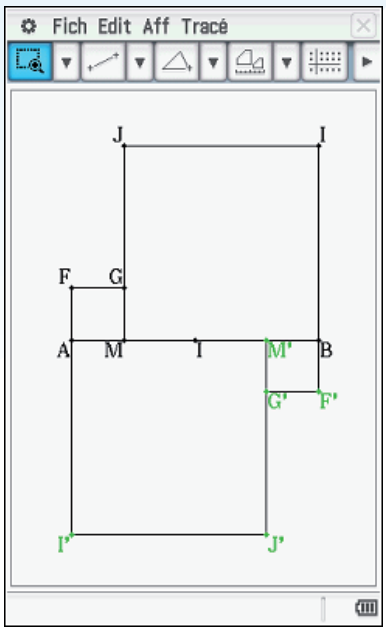
Capture 1.6 : de même pour le second carré. Nous avons donc les carrés AMGF et MBIJ de construits. Avec par l'énoncé : AM= *x*.



Capture 1.7



Capture 1.8

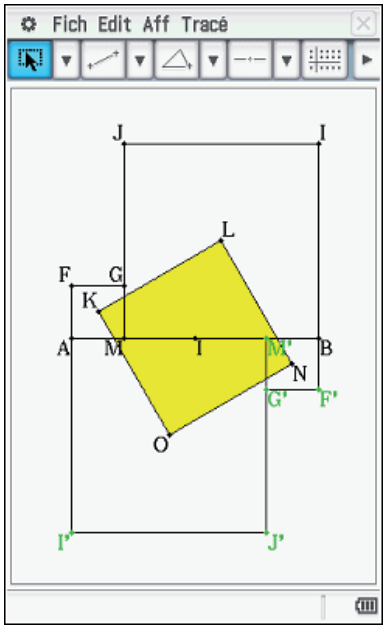


Capture 1.9

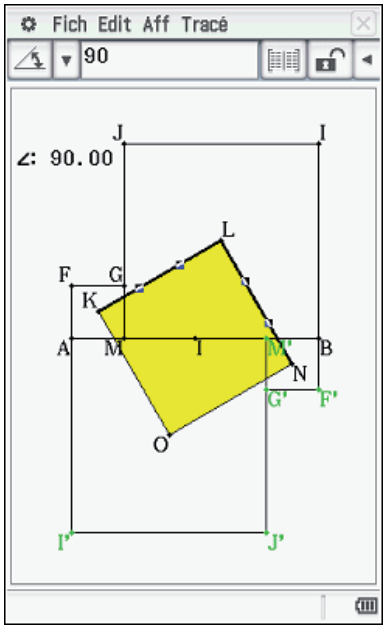
Capture 1.7 : sélectionnons les droites et cercles à cacher.

Capture 1.8 : en utilisant les segments nous pouvons finir la construction des carrés.

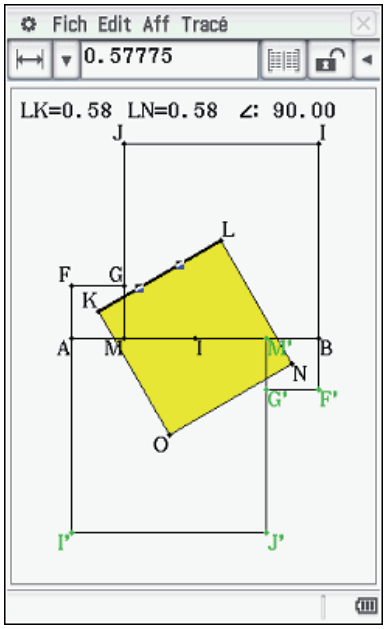
Capture 1.9 : le centre I de symétrie de la figure permet de finir la construction rapidement.



Capture 1.10



Capture 1.11

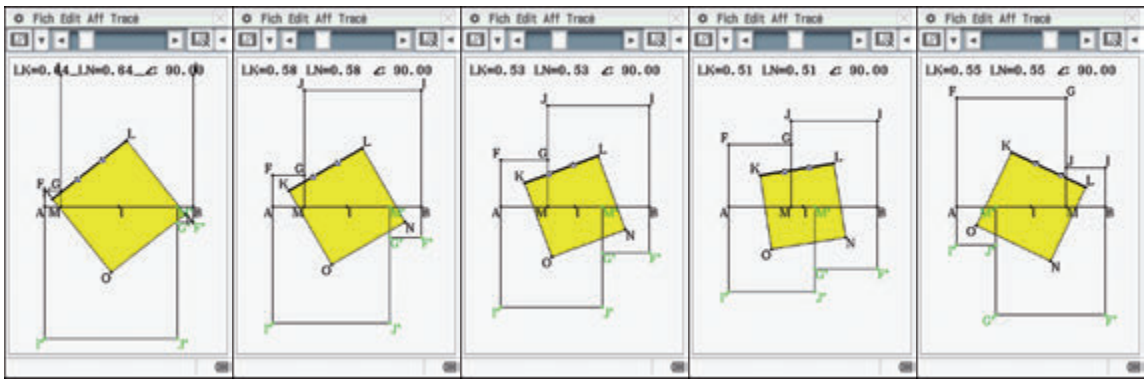


Capture 1.12

Capture 1.10 : Traçons le quadrilatère KLNO constitué des centres des quatre carrés. Notons que le centre d'un carré est défini par le milieu de l'une de ses diagonales. Dans le menu *édition*, il est possible de définir le style de ce quadrilatère par exemple, pour le colorier en jaune comme ici.

Capture 1.11 : en sélectionnant les angles on peut vérifier que ce quadrilatère semble être un rectangle.

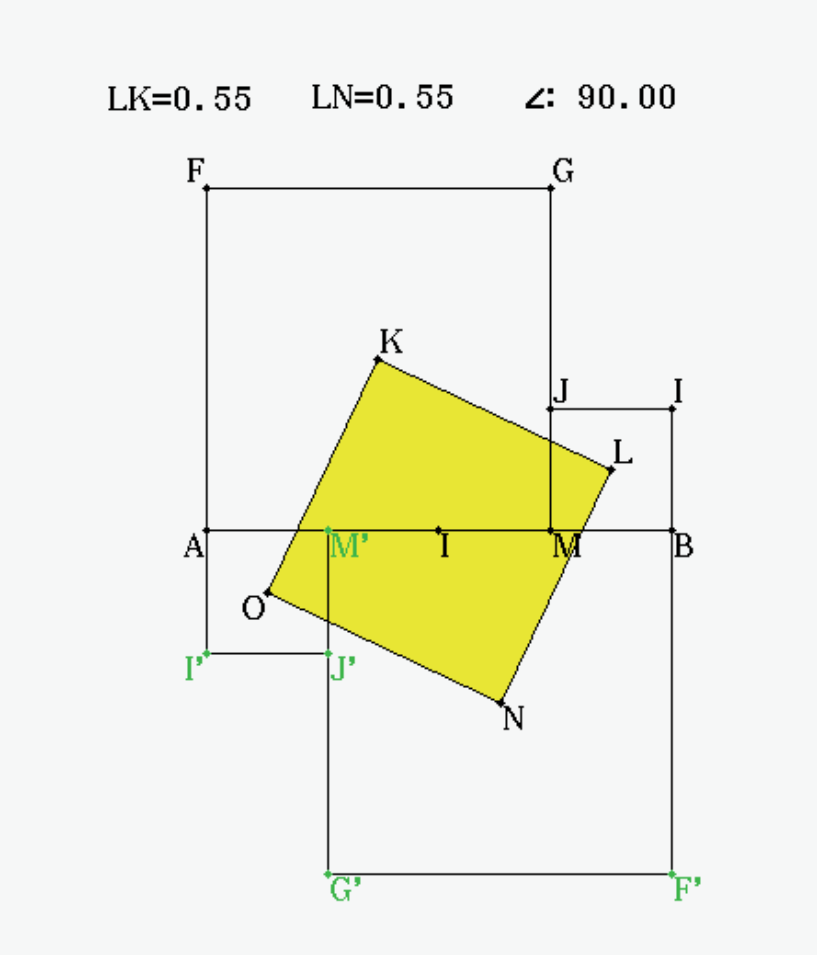
Capture 1.12 : les longueurs nous confirment que KLNO semble être un carré. A nous de le démontrer.



Capture 1.13

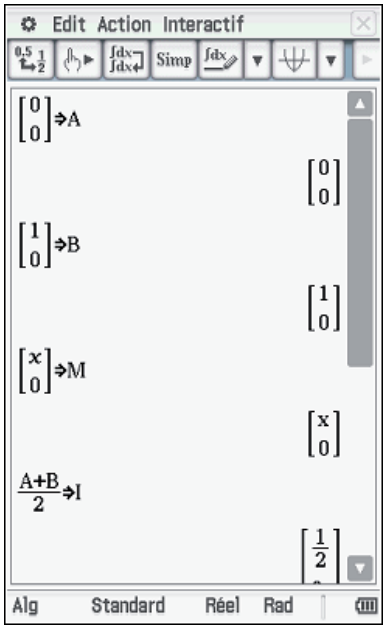
Capture 1.13 : En lançant l'animation du point M, on constate que KLNO garde ses caractéristiques. La géométrie dynamique n'apporte pas une preuve mais illustre la démonstration suivante.

Démonstration, questionnement 1, le cas particulier du segment.

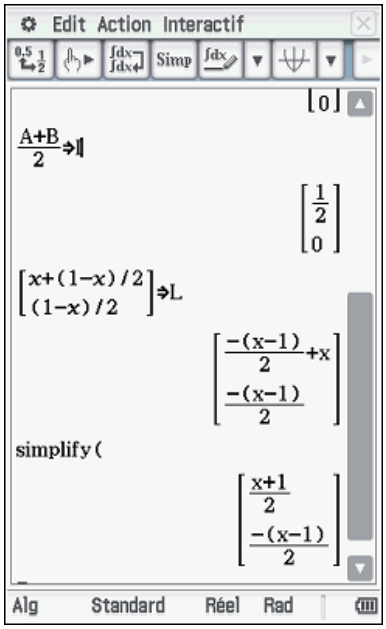


Pour démontrer que le quadrilatère jaune est bien un carré. Mettons-nous dans un repère orthonormé avec :

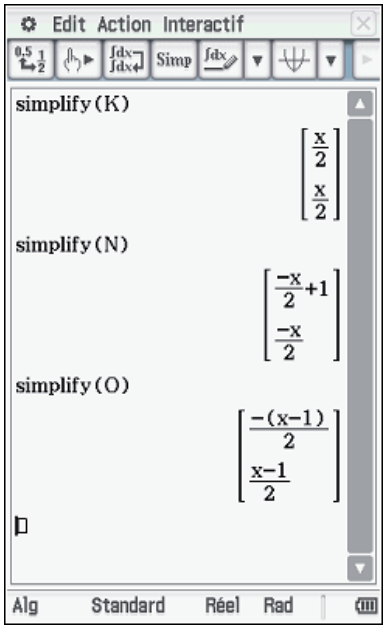
$$A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\ B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ et\ M\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$$



Capture 2.1



Capture 2.2



Capture 2.3

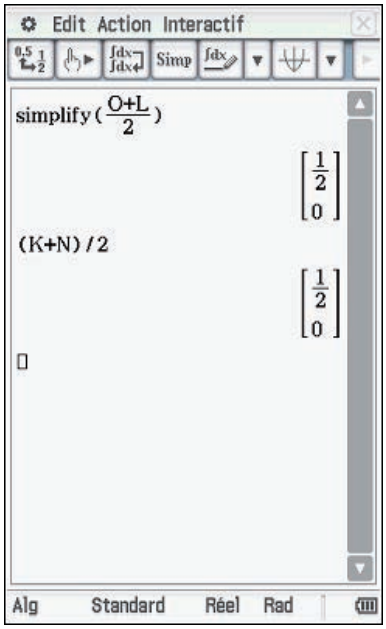
Capture 2.1 : Dans le mode Principale, posons les coordonnées des points en question.

Capture 2.2 : notons qu'il est possible de calculer les coordonnées d'un milieu, implement via la formule combinant les coordonnées des extrémités.

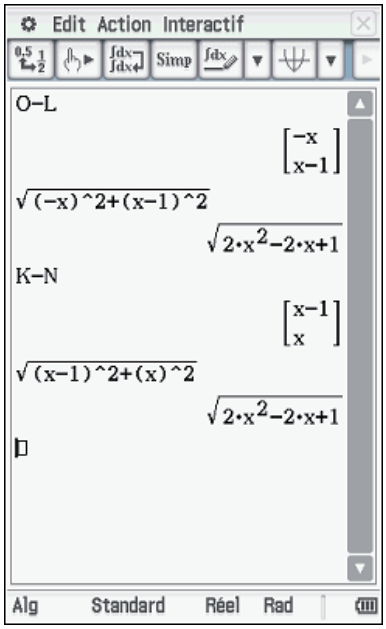
Capture 2.3 : par lecture de la figure, on retrouve rapidement les coordonnées des centres. La fonction *simplify()* permet directement d'avoir la forme simplifiée d'un calcul

On trouve ainsi :

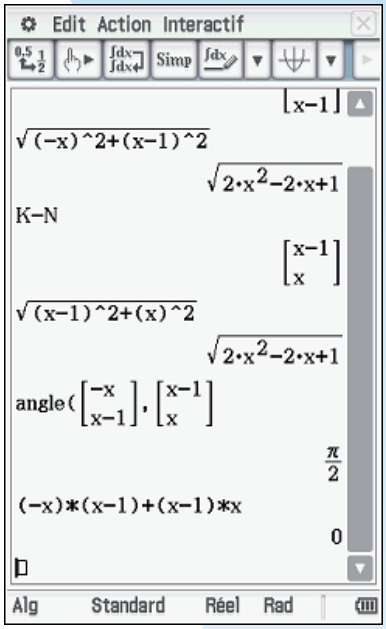
$$K\begin{pmatrix}\frac{x}{2}\\ \frac{x}{2}\end{pmatrix} L\begin{pmatrix}\frac{x+1}{2}\\ -\frac{x-1}{2}\end{pmatrix} N\begin{pmatrix}1-\frac{x}{2}\\ -\frac{x}{2}\end{pmatrix} et\ O\begin{pmatrix}-\frac{x-1}{2}\\ \frac{x-1}{2}\end{pmatrix}$$



Capture 2.4



Capture 2.5



Capture 2.6

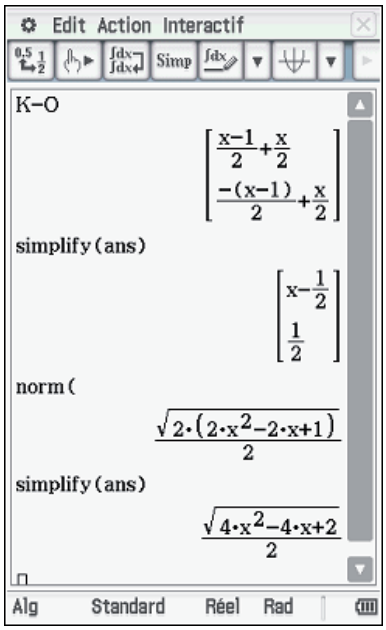
Capture 2.4 : On trouve directement que les diagonales se coupent en leur milieu. Ce qui confirme le centre de symétrie de la figure de départ. Notre quadrilatère est un parallélogramme.

Capture 2.5 : les diagonales ont la même longueur. Ainsi, nous avons la preuve que ce parallélogramme est un losange.

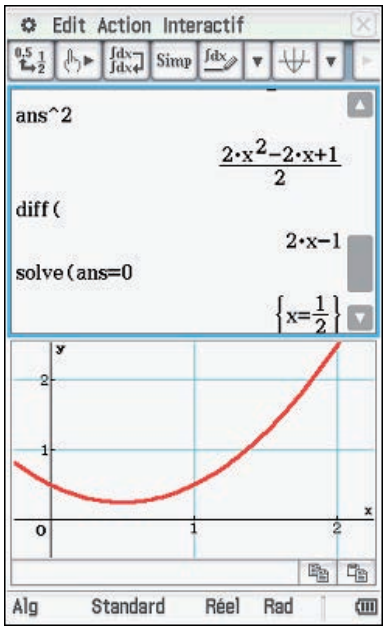
Capture 2.6 : comme les diagonales sont perpendiculaires (le produit scalaire nous le confirme), ce losange est bien un carré.

Ainsi, pour notre questionnement 1, nous avons la preuve que si M est mobile sur [AB], les centres des carrés définis forment un carré.

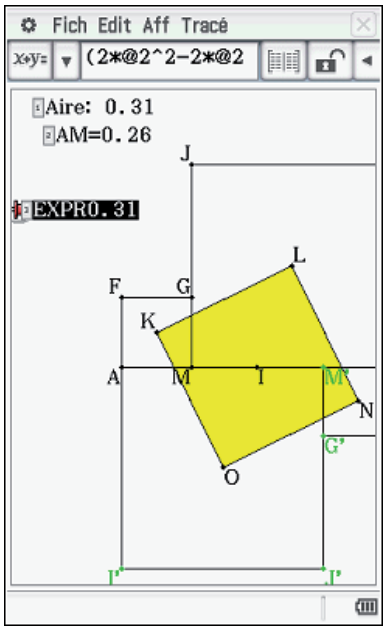
Calcul de l'aire du carré KLNO



Capture 2.7



Capture 2.8



Capture 2.9

Capture 2.7 : le calcul des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OK}$ permet de trouver l'aire du carré :

$$\boldsymbol{Aire_{KLNO} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{2}}$$

Capture 2.8 : un travail rapide sur la dérivée de l'aire en fonction de x permet de savoir que la surface minimale sera trouvée lorsque le point M se situe à la moitié du segment [AB]

Capture 2.9 : un retour dans le mode dynamique permet de vérifier via les longueurs présentes sur la figure les calculs précédents. Il est possible de travailler directement avec des expressions mathématiques sur la figure :

$$Expr = \frac{2 * @2^2 - 2 * @2 + 1}{2}$$

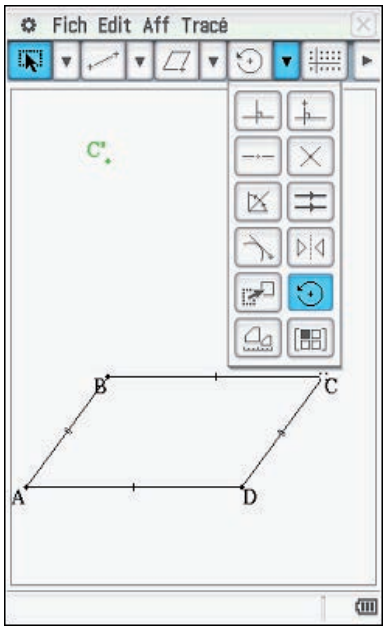
Où, @2 représente la longueur de AM soit *x*.

Théorème de Thébault, questionnement 2

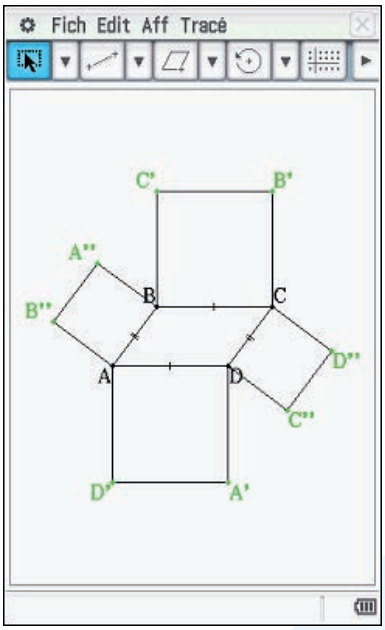
De la géométrie dynamique à la démonstration

La méthode reste la même que pour le cas particulier, nous allons dans un premier temps faire la construction de la figure puis vérifier que les centres forment un carré. Enfin, une démonstration s'impose.

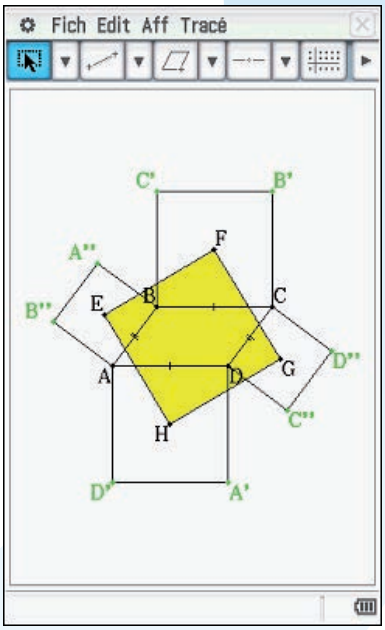
Mode dynamique



Capture 3.1



Capture 3.2

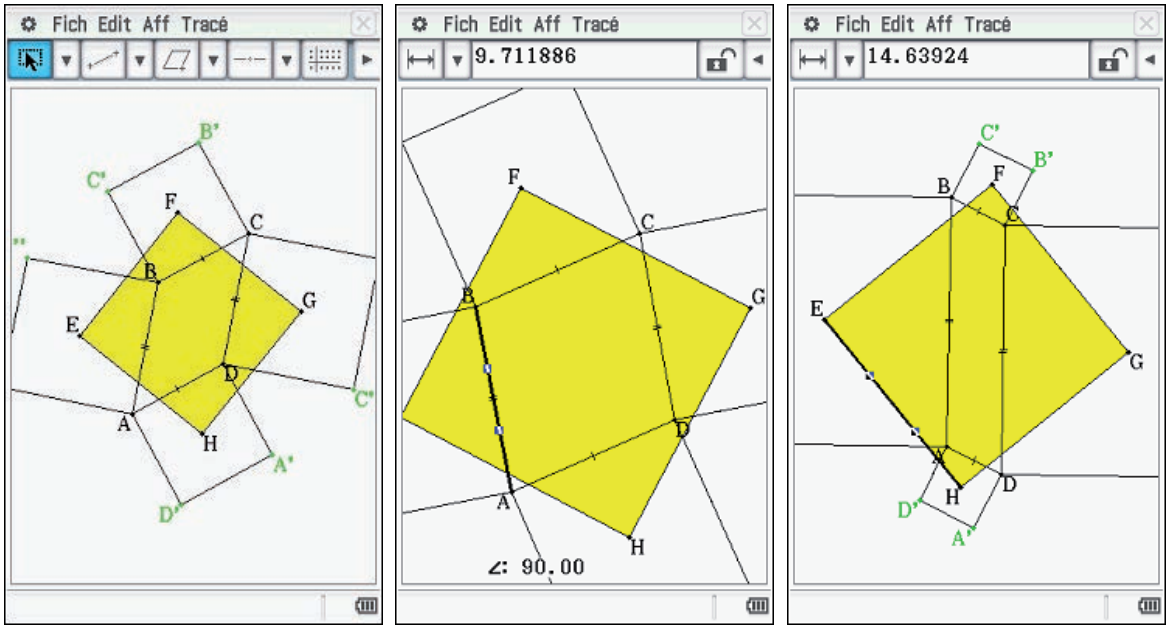


Capture 3.3

Capture 3.1 : commençons par dessiner un parallélogramme (directement via le menu). Puis, pour dessiner rapidement un carré, nous pouvons utiliser la rotation.

Capture 3.2 : un travail rapide sur la dérivée de l'aire en fonction de x permet de savoir que la surface minimale sera trouvée lorsque le point M se situe à la moitié du segment [AB].

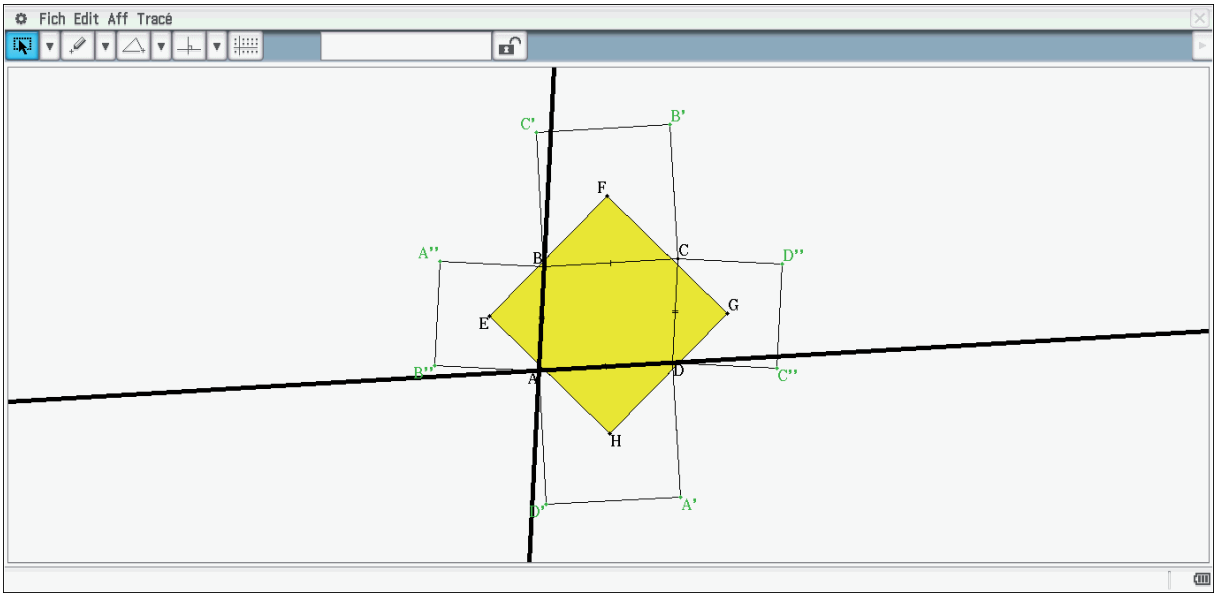
Capture 3.3 : les centres se dessinent rapidement en définissant les milieux d'une des diagonales pour chaque carré.



Capture 3.4

Capture 3.4 : la possibilité de déplacer le parallélogramme ABCD initialement dessiné permet rapidement de conjecturer sur la nature de ce quadrilatère EFGH.

Démonstration :

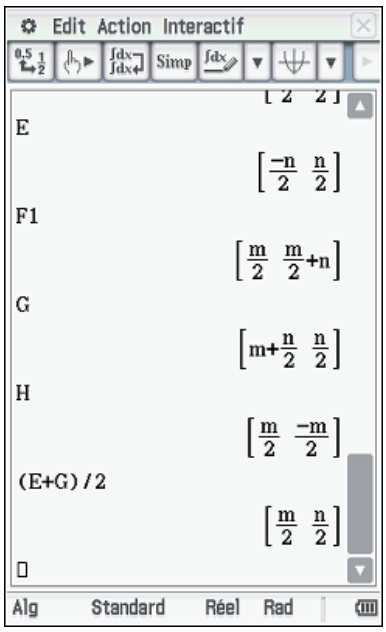


Capture 3.5

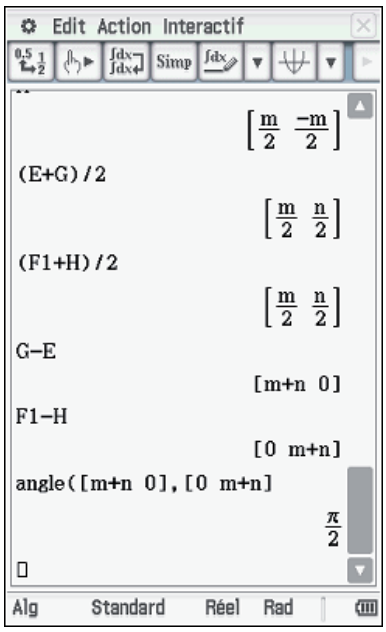
Une démonstration rapide peut-être proposée suivant le même schéma que précédemment. La mise en place d'un parallélogramme ABCD permet de définir un repère non orthogonal d'origine A tel que :

$$A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\ B\begin{pmatrix}0\\n\end{pmatrix}\ C\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}\ et\ D\begin{pmatrix}m\\0\end{pmatrix}$$

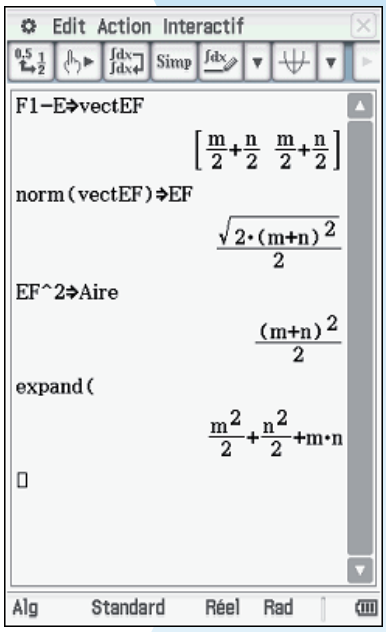
Où m et n représentent les dimensions du parallélogramme.



Capture 3.6



Capture 3.7



Capture 3.8

Capture 3.6 : le fait d'utiliser un repère non orthogonal permet d'avoir des coordonnées simples. (Notons que la lettre F est affectée dans la calculatrice, du coup, le point F sera nommé F1). Ainsi :

$$E\begin{pmatrix}-\frac{n}{2}\\ \frac{n}{2}\end{pmatrix}\ F1\begin{pmatrix}\frac{m}{2}\\ n+\frac{m}{2}\end{pmatrix}\ G\begin{pmatrix}m+\frac{n}{2}\\ \frac{n}{2}\end{pmatrix}\ et\ H\begin{pmatrix}\frac{m}{2}\\ -\frac{m}{2}\end{pmatrix}$$

Capture 3.7 : A nouveau on trouve que le quadrilatère EFGH est un carré car, ses diagonales ont la même longueur, se coupent en leur milieu et forment un angle droit.

Capture 3.8 : pour aller plus loin !

Théorème de Thébault, pour aller plus loin

Des axes à explorer.

Un repère orthonormé ?

La démonstration via un repère non orthogonal n'est pas des plus utilisables en classe et pourtant, ses avantages d'un point de vue de vitesse de calculs ne sont pas à démontrer.

Pour obtenir un travail classique, il suffit de travailler dans un repère orthonormé tel que :

$$A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\ B\begin{pmatrix}h\times cos(\alpha)\\h\times sin(\alpha)\end{pmatrix}\ C\begin{pmatrix}b+h\times cos(\alpha)\\h\times sin(\alpha)\end{pmatrix}\ et\ D\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}$$

Avec h : hauteur du parallélogramme ABCD
b : longueur de la base AD
(α) : angle entre les deux côtés [AB] et [AD]

L'aire du carré ?

La démonstration analytique n'apporte pas forcément un axe géométrique à ces questionnements .

Qu'en est-il de l'aire du carré en fonction de la figure de départ ? N'avons-nous pas perdu de vue l'essentiel ?

Notes personnelles

Notes personnelles

Notes personnelles

CASIO Éducation
Immeuble Phénix 1
24 rue Émile Baudot - 91120 PALAISEAU
Email : education-france@casio.fr

Rédacteur en chef : Jean-Philippe Blaise

Réalisation : Arc'ad+

Diffusion : Professeurs de mathématiques exclusivement

Septembre 2013

CASIO®

www.casio-education.fr